

ISSN 1026–2237

DOI 10.18522/1026–2237

*ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ  
УЧЕБНЫХ  
ЗАВЕДЕНИЙ*

*ПОСВЯЩАЕТСЯ  
100-ЛЕТИЮ  
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ  
АКАДЕМИКА РАН  
И.И. ВОРОВИЧА*

# *Северо-Кавказский регион*

---

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2020

2

Редакционная коллегия:

В.Е. Закруткин – председатель редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
В.А. Бабешко – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, Кубанский государственный университет, Россия  
Б.С. Карамурзов – доктор техн. наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия  
В.И. Колесников – академик РАН, доктор техн. наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия  
Ю.Ф. Коробейник – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
А.Г. Кусраев – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный математический институт ВНИЦ РАН, Россия  
Г.Г. Матишов – академик РАН, доктор геол.-мин. наук, профессор, Федеральный исследовательский центр, Южный научный центр РАН, Россия  
В.И. Минкин – академик РАН, доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
М.Х. Рабаданов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Дагестанский государственный университет, Россия  
Э.З. Эмирбеков – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
В.Н. Труфанов – зам. председателя редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
А.В. Абанин – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
О.С. Безуглова – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Н.И. Бойко – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
А.В. Бочкарев – доктор геол.-мин. наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Россия  
В.В. Внуков – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Л.С. Ворович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия  
О.Н. Демина – доктор биол. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия  
А.Г. Захаров – доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Л.М. Зубов – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Я.М. Ерусалимский – зам. председателя редколлегии, кандидат физ.-мат. наук, доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
М.И. Карякин – доктор физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия  
С.Б. Климентов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
С.И. Колесников – кандидат геогр. наук, доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Г.В. Куповых – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
С.В. Курбатов – доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
А.М. Лерер – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
В.А. Миноранский – доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
В.В. Онищенко – доктор геогр. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия  
О.В. Назаренко – кандидат геогр. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия  
Г.В. Пироговская – доктор с.-х. наук, профессор, Институт почвоведения и агрохимии НАН РБ, Белоруссия  
В.С. Рабинович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Национальный политехнический институт, Мексика  
Э.С. Сианисян – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Ю.А. Устинов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
П. Фатталь – доктор наук, профессор, Университет Нанта, Франция  
Ю.А. Федоров – доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
А.Д. Хованский – кандидат геол.-мин. наук, доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия  
Е.А. Шинкаренко – ответственный секретарь журнала, Южный федеральный университет, Россия  
Т.А. Ватульян – ответственный секретарь по издательской деятельности журнала, Южный федеральный университет, Россия

Учредители:

Дагестанский государственный технический университет,  
Дагестанский государственный университет,  
Донской государственный технический университет,  
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,  
Кубанский государственный технологический университет,  
Ростовский государственный университет путей сообщения,  
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),  
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова,  
Южный федеральный университет

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, В.И. Литвиненко, М.С. Шипитко

Подписано в печать 16.06.2020. Выход в свет 18.06.2020. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.  
Шрифт Times. Усл. печ. л. 14,41. Уч.-изд. л. 17,06. Тираж 250 экз. Заказ № 7626

Адрес редакции и издателя (для переписки): 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42, ЮФУ,  
журнал «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки»,  
e-mail: [izvestiya@sfedu.ru](mailto:izvestiya@sfedu.ru), адрес в Интернете: [www.izvestiya.sfedu.ru](http://www.izvestiya.sfedu.ru)

Адрес редколлегии: 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2, к. 110,  
тел.: +7 (863) 218-40-00 доб. 11-093; доб. 11-094.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции  
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ,  
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 1, к. 104, тел. +7 (863) 247-80-51

**Journal was founded in 1972 by Yu.A. Zhdanov**

**Editorial Board:**

V.E. Zakrutkin - Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia  
V.A. Babeshko - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kuban State University, Russia  
B.S. Karamurzov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Russia  
V.I. Kolesnikov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rostov State Transport University, Russia  
Yu.F. Korobeinik - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
A.G. Kusraev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia  
G.G. Matishov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Federal Research Center the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia  
V.I. Minkin - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia  
M.H. Rabadanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dagestan State University, Russia  
E.Z. Emirbekov - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia  
V.N. Trufanov - Deputy Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia  
A.V. Abanin - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
O.S. Bezuglova - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia  
N.I. Boiko - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia  
A.V. Bochkarev - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Russia  
V.V. Vnukov - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia  
L.S. Vorovich - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia  
O.N. Dyomina - Doctor of Biology, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia  
A.G. Zakharov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia  
L.M. Zubov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
Ya.M. Erusalimsky - Deputy Chairman of the Editorial Board, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia  
M.I. Karjakin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia  
S.B. Klimentov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
S.I. Kolesnikov - Candidate of Geography, Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia  
G.V. Kupovykh - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
S.V. Kurbatov - Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia  
A.M. Lerer - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
V.A. Minoranskiy - Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia  
V.V. Onishchenko - Doctor of Geography, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia  
O.V. Nazarenko - Candidate of Geography, Associate Professor, Southern Federal University, Russia  
G.V. Pirogovskaya - Doctor of Agricultural Science, Professor, Institute of Soil Science and Agrochemistry, National Academy of Sciences of Belarus, Belarus  
V.S. Rabinovich - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Polytechnic Institute, Mexico  
E.S. Sianisyan - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia  
Yu.A. Ustinov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia  
P. Fattal - PhD, Professor, University of Nantes, France  
Yu.A. Fedorov - Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia  
A.D. Khovanskiy - Candidate of Geology and Mineralogy, Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia  
E.A. Shinkarenko - Assistant Editor of the Journal, Southern Federal University, Russia  
T.A. Vatulyan - Assistant Editor for Publishing of the Journal, Southern Federal University, Russia

**The Founders**

Dagestan State Technical University,  
Dagestan State University,  
Don State Technical University,  
Berkov Kabardino-Balkarian State University,  
Kuban State Technological University,  
Rostov State Transport University,  
Rostov State University of Economics,  
Platov South Russian State Technical University,  
Southern Federal University

Magazine released T.A. Vatulyan, L.S. Vorovich, V.I. Litvinenko, M.S. Shipitko

Signed print 16.06.2020. The publication 18.06.2020. Format 60×84 1/8. Offset paper. Font Times.  
Conv. print. sheets 14,41. Publ. sign. 17,06. Edition 250 copies. Order number 7626.

Address of Editorial Board: 344006, Rostov-on-Don, Bolshaya Sadovaya St., 105/42,  
SFU, journal "Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science",  
e-mail: izvestiya@sfnu.ru, Web Address: www.izvestiya.sfnu.ru

Address of Editorial Board: 344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 2, room 110,  
phone +7 (863) 218-40-00 ext. 11-093; ext. 11-094.

Printed in the printing department, and corporate souvenirs,  
Publishing and printing complex KIBI MEDIA CENTER, SFU,  
344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 1, room 104, phone (863) 247-80-51

# ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

## BULLETIN OF HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS. NORTH CAUCASUS REGION.

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2

*Свидетельство о регистрации*  
*ПИ № ФС 77 – 77252 от 25.11.2019,*  
*выдано Федеральной службой по надзору*  
*в сфере связи, информационных технологий*  
*и массовых коммуникаций*  
*Научный журнал*  
*Издается с 1973 г.*  
*Периодичность серии 4 номера в год*  
*№ 2 (206) 2020 г.*

*Registration certificate*  
*PI No. FS 77 - 77252 dated 25.11.2019*  
*issued Federal Service for Supervision*  
*of Communications, Information Technology,*  
*and Mass Media*  
*Science magazine*  
*Published since 1973.*  
*4 issues per a year*  
*No. 2 (206) 2020*

### ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

### NATURAL SCIENCE

#### СОДЕРЖАНИЕ

#### CONTENTS

<i>Бабешко В.А., Ватульян А.О., Карякин М.И., Чебаков М.И.</i> Иосиф Израилевич Ворович (1920–2001): к столетию со дня рождения..... 5	<i>Babeshko V.A., Vatulyan A.O., Karjakin M.I., Chebakov M.I.</i> Josif Izrailevich Vorovich (1920–2001): to the Century of BirthdaY ..... 5
<i>Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.</i> Об упрощении сложных уравнений применением блочных элементов ..... 8	<i>Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.</i> On Simplifying Complex Equations by Applying Block Elements ..... 8
<i>Акопян В.Н., Григорян А.А.</i> Антиплоская деформация равномерно кусочно-однородного пространства с периодической системой полубесконечных внутренних трещин..... 13	<i>Hakobyan V.N., Grigoryan A.A.</i> Anti-Plane Deformation Uniformly Piecewise Homogeneous Space with a Periodic System of Semi-Infinite Internal Cracks ..... 13
<i>Бондарчук А.А., Казаков Е.А., Сумбатян М.А.</i> Идентификация режима работы пропеллера беспилотного летательного аппарата по акустическому сигналу ..... 21	<i>Bondarchuk A.A., Kazakov E.A., Sumbatyan M.A.</i> Identification of the Operation Mode of the Unmanned Aircraft Propeller by Acoustic Signal ..... 21
<i>Васильев А.С., Волков С.С., Садырин Е.В., Кисляков Е.А., Айзикович С.М.</i> Упрощенное аналитическое решение контактной задачи о вдавливании конического штампа в полупространство с покрытием.... 29	<i>Vasiliev A.S., Volkov S.S., Sadyrin E.V., Kislyakov E.A., Aizikovich S.M.</i> Simple Explicit Analytical Solution for Indentation of a Half-Space with a Coating by a Conical Punch ..... 29
<i>Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О., Павлов И.С.</i> Методы структурного моделирования и альтернативной континуализации при анализе нелинейных локализованных волн в градиентно-упругой среде ..... 38	<i>Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O., Pavlov I.S.</i> Structural Modeling Methods and Alternative Continualization for the Analysis of Nonlinear Localized Waves in a Gradient-Elastic Media..... 38

<i>Зубчанинов В.Г.</i> К вопросу об определяющих законах связи общей математической теории пластичности .....	48	<i>Zubchaninov V.G.</i> To the Question of Determining Laws of Communication General Mathematical Theory of Plasticity.....	48
<i>Карякин М.И., Обрезков Л.П.</i> Растяжение и раздувание нелинейно-упругого неоднородного полого цилиндра .....	53	<i>Karyakin M.I., Obrezkov L.P.</i> Stretching and Inflating the Nonlinear Elastic Inhomogeneous Hollow Cylinder .....	53
<i>Мехтиева М.Ф., Ахмедов Н.К., Юсубова С.М.</i> Асимптотическое поведение решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины .....	61	<i>Mehdiyev M.F., Akhmedov N.K., Yusubova S.M.</i> Asymptotic Behavior of the Solution to the Axisymmetric Dynamical Problem of the Elasticity Theory for the Transversally Isotropic Spherical Layer of Small Thickness.....	61
<i>Мхитарян С.М.</i> О применении метода гиперсингулярных интегральных уравнений к решению задач для упругой плоскости с коллинеарной системой трещин .....	72	<i>Mkhitaryan S.M.</i> On the Application of the Method of Hypersingular Integral Equations to Solving Problems for an Elastic Plane with a Collinear System of Cracks.....	72
<i>Пухначев В.В., Петрова А.Г., Фроловская О.А.</i> Растворы полимеров и их математические модели	84	<i>Pukhnachev V.V., Petrova A.G., Frolovskaya O.A.</i> Polymer Solutions and Their Mathematical Models	84
<i>Саакян А.В.</i> Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями.....	94	<i>Sahakyan A.V.</i> A Quadrature Formula for a Hypersingular Integral Containing the Weight Function of Jacobi Polynomials with Complex Exponents.....	94
Фотографии разных лет.....	100	Photos of Different Years.....	100
Воспоминания соратников и учеников .....	105	Memoirs of associates and disciples .....	105



*21 июня 2020 г. исполняется 100 лет со дня рождения  
академика РАН Иосифа Израилевича Воровича (1920–2001).  
Этой памятной дате посвящается номер журнала.*

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-5-7

**ИОСИФ ИЗРАИЛЕВИЧ ВОРОВИЧ (1920–2001):  
К СТОЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ****JOSIF IZRAILEVICH VOROVICH (1920-2001):  
TOTHECENTURYOFBIRTHDAY**

21 июня 2020 г. исполняется 100 лет со дня рождения Иосифа Израилевича Ворovichа – выдающегося российского ученого, обогатившего науку многими достижениями в области механики и математики, замечательного педагога, создавшего школу механиков, широко известную не только в России, но и за ее пределами.

И.И. Ворovich родился в старинном городке Стародубе на Брянщине, где и окончил среднюю школу.

В 1937 г. он поступил в Московский государственный университет (МГУ) на отделение механики, где преподавали ученые, являющиеся гордостью русской и советской науки. Первую научную работу в области контактных задач молодой ученый выполнил во время обучения под руководством будущего академика А.И. Ишлинского.

С начала Великой Отечественной войны И.И. Ворovich в числе других студентов МГУ был призван в ряды Красной армии и направлен на учебу в Военно-воздушную инженерную академию им. Н.Е. Жуковского. Курсанты, помимо приобретения инженерных знаний, проходили производственную практику на прифронтовых аэродромах. И.И. Ворovich в 1942 г. был авиамехаником на Волховском фронте. В 1944 г., окончив академию с отличием, был оставлен для прохождения службы, далее направлен в строевую часть для приобретения практического опыта, затем участвовал в войне с Японией на Забайкальском фронте в качестве авиатехника и авиаинженера. В 1945 г. в составе подразделения академии был участником Парада Победы.

В 1947 г. он был отозван из строевой части для продолжения учебы в академии, где под руководством выдающегося ученого академика В.С. Пугачева выполнил специальную научную работу по закрытой тематике и защитил кандидатскую диссертацию.

После демобилизации в 1950 г. – переезд в Ростов-на-Дону вместе со своим товарищем Н.Н. Моисеевым (будущим академиком) и начало педагогической работы на кафедре теоретической механики Ростовского госуниверситета. Здесь Иосиф

Израилевич формируется как преподаватель, активно занимается научной деятельностью.

Еще во время войны его заинтересовали некоторые вопросы интенсивно развивающейся теории оболочек, имеющей многочисленные приложения в авиационной и ракетостроительной. Этот интерес трансформировался в ряд первоклассных результатов в математической теории оболочек, и в 1958 г. И.И. Ворovich блестяще защитил докторскую диссертацию в Ленинградском университете на тему «Некоторые математические вопросы нелинейной теории оболочек».

Диссертация получила высокую оценку оппонентов – академика Ю.Н. Работнова и член-корреспондента В.В. Новожилова, профессоров С.Г. Михлина и О.А. Ладыженской. При этом для анализа сложных нелинейных операторных уравнений были использованы новые топологические методы, позволившие доказать важные результаты в теории оболочек. Были доказаны теоремы разрешимости для нелинейных краевых задач теории тонкостенных конструкций, обоснованы приближенные методы как для расчета деформирования, так и для оценки устойчивости, в том числе и при учете случайных факторов.

В 1961 г. кафедра теоретической механики была реформирована; образована кафедра теории упругости на физико-математическом факультете, которую возглавил И.И. Ворovich. Он активно продолжает заниматься математическими аспектами теории оболочек, в первую очередь приложениями теории случайных процессов при оценке влияния случайных факторов на устойчивость оболочек. В то же время на кафедре был заключен первый хозяйственный договор практического характера, привлечены к его выполнению молодые сотрудники, дан импульс развитию других направлений в механике.

К концу 60-х гг. XX в. на кафедре теории упругости наряду с глубокими теоретическими работами в области теории плит и оболочек, контактных задач уже выполнялись и экспериментальные исследования в области устойчивости тонкостенных оболочек, механики полимеров и др. Был

сформирован коллектив механиков-теоретиков и инженеров, активно участвующих не только в образовательном процессе, но и в выполнении различных работ для нужд народного хозяйства.

Новый этап в жизни И.И. Воровича связан с тем периодом, когда в 1971 г. был создан Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики (НИИМиПМ), директором которого он был назначен. В институте получили развитие многие фундаментальные направления кафедры теории упругости, но вместе с тем продолжались исследования прикладных задач в области прочности подшипников, механики полимеров и сегнетоэлектриков, дефектоскопии, фундаментостроения и сейсморазведки, гидроэкологии и других направлений. В области прикладной математики по инициативе И.И. Воровича, имевшего большой опыт исследований сложных механических систем, было создано новое для Ростовской математической школы научное направление – математическое моделирование сложных экологических и экономических систем.

Тридцать лет И.И. Ворович успешно руководил институтом, привлекая к исследованиям не только опытных сотрудников, но и молодых исследователей – выпускников мехмата. Здесь выросли как исследователи и руководители лучшие ученики Иосифа Израилевича, сформировалась преемственность научных поколений.

Остановимся на научном наследии И.И. Воровича. Оно многогранно. Отметим ряд направлений, где вклад Иосифа Израилевича особенно весом.

Во-первых, это проблема перехода от трехмерной задачи теории упругости к двумерной; разработка нового варианта асимптотического метода, на базе которого построены уточненные методы расчета пластин, оболочек и плит, широко используемые в настоящее время.

Во-вторых, это существенный вклад в изучение смешанных статических и динамических задач теории упругости для полуограниченных тел на основе асимптотических методов, получивших развитие в трудах его учеников.

В-третьих, это формулировка принципа устойчивости естественного ненапряженного состояния, на основе которого установлены ограничения на способы описания реологических свойств полимеров. В этом направлении был решен ряд связанных задач термовязкоупругости в теории оболочек, проведено исследование критериев потери устойчивости вязкоупругих тонкостенных конструкций.

Широкую известность получили исследования Иосифа Израилевича по математическому моделированию экологических систем. Он был одним из инициаторов разработки эколого-математической

модели Азовского моря, которая по адекватности и анализу учетных факторов считается пионерской в мировой практике. В 1983 г. за создание этой модели коллективу, который возглавлял И.И. Ворович, была присуждена Государственная премия СССР.

Научная и педагогическая деятельность И.И. Воровича по достоинству оценена научным сообществом. В 1970 г. он был избран членом-корреспондентом АН СССР по отделению проблем машиностроения, механики и процессов управления, а в 1990 г. – действительным членом АН СССР.

За цикл работ по фундаментальным проблемам тонкостенных конструкций И.И. Ворович в составе группы исследователей был в 1998 г. удостоен Государственной премии РФ.

В течение 50 лет выдающийся ученый и талантливый педагог И.И. Ворович вел преподавательскую работу в Ростовском государственном университете. Большим авторитетом в России и за ее пределами пользуется созданная им научно-педагогическая школа ученых-механиков, среди которых около 50 докторов и более 160 кандидатов наук.

На протяжении многих лет он возглавлял редакционную коллегию журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» («Известия СКНЦ ВШ»).

Из научной школы И.И. Воровича вышел ряд ректоров и заведующих кафедрами ведущих вузов России, ученых, создавших новые научные направления и свои научные школы.

За боевые и трудовые заслуги он был награжден орденами и медалями СССР и Российской Федерации, удостоен медалей академиков П.Л. Капицы и А.А. Благонравова.

Иосифа Израилевича нет с нами около 20 лет, но живет память о нем в сердцах учеников, сердцах студентов мехмата; имя И.И. Воровича носит Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета. Ростовчане гордятся человеком, который около 50 лет прожил в этом городе, сделав очень много для развития науки и образования; в 2017 г. на «Аллее звезд» г. Ростова-на-Дону, состоящей из звездочек знаменитых и уважаемых горожан, зажглась звезда Иосифа Израилевича Воровича.

Изданы 2 тома монументального труда «Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд», написанию которого Иосиф Израилевич посвятил последние годы жизни.

Об И.И. Воровиче смело можно сказать, что ему свойствен такой уровень научной оценки, что грань между его талантом и гениальностью практически незаметна. Порожденными им идеями будут пи-



таться и развивать их многие поколения ученых. Иосифу Израилевичу благодаря его таланту и образованию (фундаментальному математическому и инженерному) свойственна поразительная широта кругозора. Он с легкостью не только входил в новые научные направления, но и обогащал их новыми идеями, получал новые результаты.

Вот несколько примеров. Прибыв в Ростов-на-Дону с блестящими результатами по нелинейным тонкостенным конструкциям, описанными выше, он продолжал успешно развивать их и дальше. Базируясь на некоторых общих идеях принципа сжимающих отображений, он сформировал направление по смешанным и контактными задачам, внёс в их теорию неоценимый вклад. Впоследствии, анализируя динамические контактные задачи, подготовил научный фундамент, позволивший зарегистрировать едва ли не единственное в механике научное открытие «Явление высокочастотного резонанса в полуграниченных телах с неоднородностями», приоритет которого (1987 г.) был подтвер-

жден американскими учеными. Именно эти разработки И.И. Воровича были подхвачены исследователями всего мира. Его идеи в приложениях к самым разным задачам звучали в пленарных докладах на научных конференциях и конгрессах в США, Японии, Италии, Канаде, Франции, Австрии. Докладывались новейшие результаты о типе землетрясений, которые можно прогнозировать, о явлениях самосборки наноматериалов, о природных явлениях, таких как математически обоснованное «бабье лето», о топологической дискретизации решений граничных задач и другие, обязанные своим происхождением идеям И.И. Воровича. Высочайший уровень его исследований как ученого и талант учителя подтверждается и тем, что среди его учеников выросли и члены Российской академии наук, и лауреаты Государственной премии России.

Память об этом выдающемся человеке надолго сохранится в наших сердцах. Огромное научное наследие академика РАН И.И. Воровича продолжает служить науке.

*В.А. Бабешко, академик РАН, доктор физико-математических наук, Кубанский государственный университет*

*А.О. Ватульян, доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет*

*М.И. Карякин, доктор физико-математических наук, доцент, Южный федеральный университет*

*М.И. Чебаков, доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет*

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-8-12

## ОБ УПРОЩЕНИИ СЛОЖНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИМЕНЕНИЕМ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

© 2020 г. В.А. Бабешко<sup>1,2</sup>, О.В. Евдокимова<sup>2</sup>, О.М. Бабешко<sup>1</sup><sup>1</sup>Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия,<sup>2</sup>Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

## ON SIMPLIFYING COMPLEX EQUATIONS BY APPLYING BLOCK ELEMENTS

V.A. Babeshko<sup>1,2</sup>, O.V. Evdokimova<sup>2</sup>, O.M. Babeshko<sup>1</sup><sup>1</sup>Kuban State University, Krasnodar, Russia,<sup>2</sup>Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia,

Бабешко Владимир Андреевич – доктор физико-математических наук, академик РАН, заведующий кафедрой математического моделирования, Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, г. Краснодар, 350040, Россия; научный руководитель направления математики и механики, Южный научный центр РАН, пр. Чехова, 41, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия, e-mail: babeshko41@mail.ru

Vladimir A. Babeshko - Doctor of Physics and Mathematics, Academician, Russian Academy of Sciences, Head of the Department of Mathematical Modeling, Kuban State University, Stavropolskaya St., 149, Krasnodar, 350040, Russia; Scientific Director of Mathematics and Mechanics, Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Chekhova Ave., 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: babeshko41@mail.ru

Евдокимова Ольга Владимировна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Южный научный центр РАН, пр. Чехова, 41, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия, e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Olga V. Evdokimova - Doctor of Physics and Mathematics, Main Researcher, Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Chekhova Ave., 41, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Бабешко Ольга Мефодиевна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Кубанский государственный университет, ул. Ставропольская, 149, Краснодар, 350040, Россия, e-mail: babeshko49@mail.ru

Olga M. Babeshko - Doctor of Physics and Mathematics, Main Researcher, Kuban State University, Stavropolskaya St., 149, Krasnodar, 350040, Russia, e-mail: babeshko49@mail.ru

Существуют несколько подходов, направленных на упрощение сложных уравнений в частных производных (или их систем), участвующих в постановках граничных задач, введением более простых, но в большем количестве дифференциальных уравнений. Их решения позволяют описывать сложные граничные задачи. Однако для осуществления этого подхода необходимо строить решения упрощенных граничных задач в пространствах их разрешимости для произвольных граничных условий. В ряде случаев это можно делать применением метода блочного элемента, который, имея топологическую основу, вскрывает как глобальные, так и локальные свойства решений граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Вместе с этим он может применяться для исследования и решения более сложных граничных задач с помощью соотношений, описывающих некоторые задачи механики сплошной среды посредством относительно простых уравнений, например Гельмгольца. Для этого надо строить такие решения уравнения Гельмгольца, которые удовлетворяют граничным условиям, содержащим не частные значения задаваемых на границе функций, а совершенно произвольные. Применительно к уравнению Гельмгольца это достигается использованием метода блочного элемента. Примеры решений граничных задач Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца и сравнительный анализ решений приводятся в настоящей статье.

\* Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации госзадания ЮНЦ РАН на 2020 г., проекта (00-19-13) № 01201354241, программ Президиума РАН № 7, проект (00-19-03), и № 20, проект (00-19-10), и при поддержке грантов РФФИ (19-41-230003), (19-41-230004), (19-48-230014), (18-08-00465), (18-01-00384), (18-05-80008).

**Ключевые слова:** метод блочного элемента, граничная задача, топология, псевдодифференциальные уравнения.

*There are several approaches aimed at simplifying complex partial differential equations or their systems involved in the formulation of boundary value problems by introducing simpler, but in a larger number of differential equations. Their solutions allow us to describe solutions to complex boundary value problems. However, to implement this approach, it is necessary to construct solutions of simplified boundary value problems for arbitrary boundary conditions in solvability spaces boundary value problem. In some cases, this can be done using the block element method. The block element method, which has a topological basis, reveals both global and local properties of solutions to boundary value problems for partial differential equations.*

*At the same time, it can be used to study and solve more complex boundary value problems by applying relations that describe certain equations of the continuum by means of relatively simple equations, for example, Helmholtz. To do this, we need to construct solutions of the Helmholtz equations that satisfy boundary conditions that contain completely arbitrary values, rather than partial values, set at the boundary of functions. In relation to the Helmholtz equations, this is achieved using the block element method. Examples of constructing solutions to boundary value problems for Helmholtz equation for Dirichlet and Neumann problems and a comparative analysis of solutions are given in this article.*

**Keywords:** block element method, boundary value problem, topology, pseudo differential equation.

## Введение

Исследованию краевых задач для уравнения Гельмгольца посвящено большое количество работ, часть из которых вместе с применяемыми методами приведена в [1–10]. Метод блочного элемента впервые для решения граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца рассмотрен в [11]. В этой работе построено точное решение в виде упакованных блочных элементов при произвольных граничных условиях в области типа неограниченного прямоугольного клина. Также произведен некоторый анализ акустических свойств среды в этой области.

В настоящей работе исследуется граничная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца в сопоставлении с задачей Неймана. Решения этих задач являются исходными для применения подхода [8–10], состоящего в представлении операторов сложных граничных задач через посредство операторов Гельмгольца и более простых, и могут служить целям нового способа проектирования материалов мозаичной структуры [12]. Представления решений граничных задач в виде упакованных блочных элементов [13] открывают возможность исследования и решения граничных задач практически любой сложности и в любых областях. Это связано с тем, что произвольную область всегда можно реально или виртуально представить в виде некоторой блочной структуры, блоки которой можно формировать из условия удобства решения поставленных на них граничных задач [12]. Применяя подходы [8–10] и решения уравнения Гельмгольца, основываясь на аналитических решениях, можно осуществлять глубокий анализ операторов сложных граничных задач методом, разработанным академиком И.И. Воровичем в [14].

## Основные уравнения

Введем правую прямоугольную систему координат, направив оси  $ox_1$ ,  $ox_3$  горизонтально, а ось  $ox_2$  – вертикально вверх. Рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в прямоугольной области  $\Omega(|x_3| \leq \infty, x_1 \leq 0, x_2 \leq 0)$ .

Для применения метода блочного элемента к граничной задаче в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построение фактор-топологии. Ввиду рассмотрения лишь одного блочного элемента необходимость в последнем алгоритме отпадает.

Рассмотрим для этого уравнения граничные задачи Дирихле и Неймана.

В первом случае считаем, что граничные условия имеют вид

$$u(x_1, 0, x_3) = f_1(x_1, x_3), \quad u(0, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_3). \quad (1)$$

Здесь произвольные функции  $f_n$  обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Поскольку область  $\Omega$  содержит бесконечно удаленные точки, то в случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с применением принципа излучения.

## Метод решения

Применением преобразования Фурье к трехмерному дифференциальному уравнению Гельмгольца

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2) u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

по параметру  $x_3$  в обеих граничных задачах получаем дифференциальное уравнение с параметром вида

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2)u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \quad (2)$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Используем один из способов касательного расщепления границы. После применения двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм приходим к функциональным уравнениям вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_{\Omega} \omega, \quad \text{где}$$

$$\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 -$$

$$-i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 + \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 -$$

$$-i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \iiint_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3) e^{i(\alpha \mathbf{x})} dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$\langle \alpha \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i(\alpha \mathbf{x})} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Правую часть в функциональном уравнении можно представить в виде

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 -$$

$$-i\alpha_1 \int_{-\infty}^0 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 -$$

$$-i\alpha_2 \int_{-\infty}^0 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1} dx_1.$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можно функциональное уравнение представить в форме

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\ &= \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ &+ \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3). \end{aligned}$$

В дальнейшем прописной буквой будут обозначаться преобразования Фурье, вычисленные от функций, представленных соответствующей строчной буквой.

1. Рассмотрим случай задачи Дирихле. Внесем в правую часть значения функций (1). Имеем

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{\partial U_1(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - \\ &- i\alpha_1 F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) + \frac{\partial U_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3). \end{aligned}$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) = (\alpha_1 - \alpha_{1-})(\alpha_1 + \alpha_{1-}) = (\alpha_2 - \alpha_{2-})(\alpha_2 + \alpha_{2-}),$$

$$\alpha_{1-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2},$$

$$\text{Im}\alpha_{1-} \leq 0, \quad \text{Im}\alpha_{2-} \leq 0.$$

Условие автоморфизма для носителя и функций на нем приводит к псевдодифференциальным уравнениям вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(0, \alpha_{2-}, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_{2-} F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) = 0, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_{1-} F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) = 0. \end{aligned}$$

Неизвестными в (3) являются функции  $\frac{\partial U_1(0, \alpha_{2-}, \alpha_3)}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial U_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial U_1(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial U_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}$ .

Решение псевдодифференциальных уравнений, найденное с требованием обращения в нуль псевдодифференциальных уравнений вне области  $\Omega$ , приводит после преобразований к следующему виду функционального уравнения:

$$\begin{aligned} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\ &= [F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)](\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \\ &+ [F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_2(0, \alpha_2, \alpha_3)](\alpha_1 - \alpha_{1-}). \end{aligned}$$

Решение, представляющее упакованный блочный элемент, принимает вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{R^3} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i(\alpha \mathbf{x})} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3,$$

$$\begin{aligned} U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \\ &= \frac{i}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2)} ([F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)](\alpha_2 - \alpha_{2-}) + \end{aligned}$$

$$+ [F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_2(0, \alpha_2, \alpha_3)] (\alpha_1 - \alpha_{1-}) \rangle.$$

Функцию  $U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  можно представить в виде

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = i \left\langle \frac{[F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})} + \frac{[F_2(0, \alpha_{2-}, \alpha_3) - F_2(0, \alpha_2, \alpha_3)]}{(\alpha_1 + \alpha_{1-})} \right\rangle.$$

Если на одной из граней функция  $u(x_1, x_2, x_3)$  обращается в нуль, например,  $F_2 = 0$ , то решение упрощается и принимает вид

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = i \left\langle \frac{[F_1(\alpha_{1-}, 0, \alpha_3) - F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})} \right\rangle.$$

Если на поверхности акустической среды задается дельта-функция  $\delta(x_1 - x_{10}, x_3 - x_{30})$ , то в этом случае  $F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3) = e^{i(\alpha_1 x_{10} + \alpha_3 x_{30})}$ ,

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = i \frac{[e^{i(\alpha_{1-} x_{10} + \alpha_3 x_{30})} - e^{i(\alpha_1 x_{10} + \alpha_3 x_{30})}]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})}.$$

Учитывая, что  $\alpha_{1-} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - p^2 + \alpha_3^2}$ ,

$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2 + \alpha_3^2}$ , получаем представление решения граничной задачи в виде  $u(x_1, x_2, x_3) =$

$$= \frac{i}{8\pi^3} \iiint_R^3 \frac{[\exp(x_{10}\sqrt{\alpha_2^2 - p^2 + \alpha_3^2} - i\alpha_1 x_{10}) - 1]}{(\alpha_2 - i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2 + \alpha_3^2})} \times e^{-i[\alpha_1(x_1 - x_{10}) + \alpha_2 x_2 + \alpha_3(x_3 - x_{30})]} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Построенные решения топологически представляют упакованные блочные элементы. Функции в области  $\Omega$  имеют эту область в качестве носителя, т.е. вне её они обращаются в нуль. Упакованные блочные элементы нужны при исследовании и решении граничных задач, поставленных для блочных структур (для каждого её блока). С их помощью выполняется алгоритм построения фактор-топологии, когда в качестве соотношений эквивалентности выступают межблоковые граничные условия. Для осуществления аналитического или численного анализа решения, представленного упакованным блочным элементом, его надо распаковать [14], вычислив по теории вычетов интеграл, что всегда возможно. Получившееся в результате выражение, представленное с участием интегралов или без них, во внутренней области  $\Omega$  дает решение граничной задачи. Оно для  $x_1, x_2 \leq 0$  имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{i}{2\pi^2} \times$$

$$\times \iiint_R^3 (\sin \alpha_1 x_{10}) e^{-i[\alpha_1 x_1 + i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2 + \alpha_3^2} x_2 + \alpha_3(x_3 - x_{30})]} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

С помощью внутренних односторонних пределов на границе можно убедиться в выполнении заданных граничных условий.

2. Рассмотрим граничную задачу Неймана [11] для уравнения (2).

Считаем, что граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u(0, x_2, x_3)}{\partial x_1} = f_2(x_2, x_3), \quad \frac{\partial u(x_1, 0, x_3)}{\partial x_2} = f_1(x_1, x_3).$$

Здесь произвольные функции  $f_n$  обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций.

Повторяя выполненные выше построения, получаем в преобразованиях Фурье решение граничной задачи:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - k^2)} \frac{1}{\alpha_{1-} \alpha_{2-}} \times \langle (\alpha_{2-} - \alpha_2) [ \alpha_{1-} F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1 F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3) ] + (\alpha_{1-} - \alpha_1) [ \alpha_{2-} F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2 F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3) ] \rangle.$$

После сокращений

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = i \frac{1}{\alpha_{1-} \alpha_{2-}} \left\langle \frac{[ \alpha_{1-} F_1(\alpha_1, \alpha_3) - \alpha_1 F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3) ]}{(\alpha_2 + \alpha_{2-})} + \frac{[ \alpha_{2-} F_2(\alpha_2, \alpha_3) - \alpha_2 F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3) ]}{(\alpha_1 + \alpha_{1-})} \right\rangle.$$

Полученное представление позволяет сформулировать условия на задаваемые граничные функции.

Справедлива

**Теорема** [11]. Пусть преобразования Фурье функций  $f_1(x_1, x_3)$ ,  $f_2(x_1, x_3)$  имеют непрерывные первые производные по первой координате у первой функции и по второй координате – у второй. Тогда существует решение граничной задачи в пространстве медленно растущих обобщенных функций.

Действительно, в этом случае выполняются условия  $F_1(\alpha_1, \alpha_3) - F_1(\alpha_{1-}, \alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_{1-})O(1)$ ,

$$F_2(\alpha_2, \alpha_3) - F_2(\alpha_{2-}, \alpha_3) = (\alpha_2 - \alpha_{2-})O(1),$$

при  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_{1-}$  и  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_{2-}$ , обеспечивающие выполнение автоморфизма и удовлетворение граничных условий.

Решение исходной граничной задачи в виде упакованного блочного элемента дается интегралом

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_R^3 U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i(\alpha x)} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

В [11] рассмотрены различные примеры решения этой граничной задачи.

### Выводы

Построенные решения (и подобные им в других областях) в форме упакованных блочных элементов могут служить целям формирования блочных структур с различными требованиями как к композитным материалам мозаичной структуры, так и к их сопряжению на границе. Среди них может быть формулировка условий появления на границе трещин Гриффитса – Ирвина или трещин нового типа.

### Литература

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
2. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Мат. сб. 1964. Т. 65. С. 577–630.
3. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
4. Cerveny V., Molotkov I.A., Psencik I. *Rey Method in seismology*. Praha: Univerzita Karlova, 1977. 216 p.
5. Мухина И.В. Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
6. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 348 с.
7. Беркович В.Н. К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // Докл. АН. 1990. Т. 314, № 1. С. 172–175.
8. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
10. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
11. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 6. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610.
12. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В. Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // Докл. АН. 2018. Т. 82, № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014.
13. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О стадиях преобразования блочных элементов // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 2. С. 154–158.

14. Ворович И.И., Бабешко В.А., Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

### References

1. Brekhovskikh L.M. (1973). *Waves in layered media*. Moscow, Nauka Publ., 502 p. (in Russian).
2. Babich V.M. (1964). On short-wave asymptotics of the Green function for the Helmholtz equation. *Matematicheskii sbornik*, vol. 65, pp. 577-630. (in Russian).
3. Babich V.M., Buldyrev V.S. (1972). *Asymptotic methods in the problem of short wave diffraction*. Moscow, Nauka Publ., 256 p. (in Russian).
4. Cerveny V., Molotkov I.A., Psencik I. (1977). *Rey Method in seismology*. Praha, Univerzita Karlova Press, 216 p. (in Russian).
5. Mukhina I.V. (1972). Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of elasticity theory and electrodynamics for inhomogeneous media. *PMM*, vol. 36, pp. 667-671. (in Russian).
6. Molotkov L. A. (2001). *Investigation of wave propagation in porous and fractured media based on effective models of Bio and layered media*. Saint Petersburg, Nauka Publ., 348 p. (in Russian).
7. Berkovich V. N. (1990). On the theory of mixed problems of dynamics of wedge-shaped composites. *Doklady AN*, vol. 314, no. 1, pp. 172-175. (in Russian).
8. Novatsky V. (1975). *Theory of elasticity*. Moscow, Mir Publ., 872 p. (in Russian).
9. Novatsky V. (1970). *Dynamic problems of thermoelasticity*. Moscow, Mir Publ., 256 p. (in Russian).
10. Novatsky V. (1986). *Electromagnetic effects in solids*. Moscow, Mir Publ., 160 p. (in Russian).
11. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. (2019). On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the area of a three-dimensional rectangular wedge. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, vol. 60, no. 6, pp. 90-96. DOI: 10.15372/PMTF20190610. (in Russian).
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Ryadchikov I.V. (2018). A method for the design of inhomogeneous materials and block structures. *Doklady Physics*, vol. 63, no. 10, pp. 402-406. DOI: 10.1134/S102833581810001413. (in Russian).
13. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. (2016). Stages of transformation of block elements. *Doklady Physics*, vol. 61, no. 5, pp. 227-231. DOI 10.1134/S1028335816050049. (in Russian).
14. Vorovich I. I., Babeshko V. A. (1979). *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains*. Moscow, Nauka Publ., 320 p. (in Russian).

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-13-20

## АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ РАВНОМЕРНО КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ВНУТРЕННИХ ТРЕЩИН

© 2020 г. В.Н. Акопян<sup>1</sup>, А.А. Григорян<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Армения

## ANTI-PLANE DEFORMATION UNIFORMLY PIECEWISE HOMOGENEOUS SPACE WITH A PERIODIC SYSTEM OF SEMI-INFINITE INTERNAL CRACKS

V.N. Hakobyan<sup>1</sup>, A.A. Grigoryan<sup>1</sup><sup>1</sup>Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, пр. Маршала Баграмяна, 24б, г. Ереван, 0019, Республика Армения, e-mail: vhakobyan@sci.am

Vahram N. Hakobyan - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Main Researcher, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Marshala Baghramyana Ave., 24B, Yerevan, 0019, Republic of Armenia, e-mail: vhakobyan@sci.am

Григорян Арам Арутюнович – аспирант, Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, пр. Маршала Баграмяна, 24б, г. Ереван, 0019, Республика Армения, e-mail: grigoryan.aram4@gmail.com

Aram A. Grigoryan - Postgraduate, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Marshala Baghramyana Ave., 24B, Yerevan, 0019, Republic of Armenia, e-mail: grigoryan.aram4@gmail.com

Построено решение задачи об антиплоской деформации равномерно кусочно-однородного пространства из двух поочередно повторяющихся разнородных слоев. Они имеют равную толщину, состоят из различных материалов. Слои на своих срединных плоскостях расслаблены двумя полубесконечными, периодически расположенными параллельными туннельными трещинами. Выведены определяющие уравнения задачи в виде системы двух сингулярных уравнений первого рода относительно контактных напряжений, действующих в зонах контактов на срединных плоскостях разнородных слоев. Решение системы в общем случае построено методом механических квадратур. В частном случае, когда трещины в разнородных слоях одинаковы, решение задачи сведено к исследованию двух независимых уравнений. Построены их замкнутые решения. Получено сингулярное интегральное уравнение задачи в случае, когда в одном из разнородных слоев трещины отсутствуют. В общем случае проведен численный расчет. Определены закономерности изменения контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в конечных точках трещин в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи, каковыми являются отношения модулей сдвига слоев и отношения толщины слоев и длин трещин.

**Ключевые слова:** периодическая задача, смешанная задача, кусочно-однородное пространство, внутренние трещины.

In this paper, we have constructed a solution for the problem of antiplane deformation of a uniformly piecewise homogeneous space of two alternately repeating heterogeneous layers of equal thickness from different materials, which are relaxed on their median planes by two semi-infinite, periodic parallel tunneling cracks. A system of defining equations of the problem is derived in the form of a system of two singular equations of the first kind, with respect to contact stresses acting in the contact zones on the median planes of heterogeneous layers, the solution of which, in the general case, is constructed by the method of mechanical quadrature. In the particular case when the cracks in the heterogeneous layers are the same, the solution of the problem is reduced to the solution of two independent equations and their closed solutions are constructed. The defining singular integral equation of the problem is also obtained in the case when there are no cracks in one of the heterogeneous layers. In the general case, a numerical calculation was carried out and patterns of changes in contact stresses and intensity factors of destructive stresses at the end points of cracks were determined depending on the physical and mechanical and geometric parameters of the problem, which are the ratios of the shear moduli of the layers and the ratio of the layer thickness and crack lengths.

**Keywords:** periodic problem, mixed boundary value problem, piecewise homogeneous space, internal cracks.

## Введение

Периодические и двоякопериодические задачи для упругих однородных массивных тел с дефектами типа трещин, абсолютно жёстких или деформируемых включений – одно из развивающихся направлений теории контактных и смешанных задач математической теории упругости. Многие основополагающие результаты по этой проблеме изложены в монографиях [1, 2]. Аналогичные исследования для кусочно-однородных, слоистых тел, весьма актуальные с точки зрения механики слоистых композитов, начали проводиться совсем недавно. Были построены разрывные решения уравнений теории упругости для кусочно-однородного равномерно слоистого пространства с межфазными или внутренними конечными дефектами при антиплоской, плоской и осесимметричной деформациях [3–8]. Отметим также работу [9], которая более тесно связана с исследуемой здесь задачей. В ней построены точные решения аналогичной задачи для кусочно-однородного равномерно слоистого пространства с периодической системой внутренних туннельных конечных трещин и частично оторванных от матрицы абсолютно жёстких конечных включений.

## Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть кусочно-однородное пространство, состоящее из двух поочередно повторяющихся разнородных слоев равной толщины  $2h$  из различных материалов с модулями сдвига  $G_1$  и  $G_2$ , содержит периодическую систему туннельных параллельных трещин на срединных плоскостях  $y = (2n+1)h$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , по бесконечным полосам  $L_j = (-\infty, -a_j) \cup (a_j, \infty)$ ,  $j = 1, 2$ , соответственно в первом и во втором разнородном слоях и находится в условиях антиплоской деформации. Будем считать, что пространство деформируется под воздействием одинаковых, противоположно направленных распределённых нагрузок  $\tau_1(x)$  и  $\tau_2(x)$ , действующих на берегах трещин в разнородных слоях и имеющих конечные результирующие  $P_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Требуется построить решение поставленной задачи, выяснить закономерности изменения важных механических характеристик в зависимости от физико-механических и геометрических параметров разнородных слоев.

Нетрудно заметить, что при такой постановке задачи  $y = (2n+1)h$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , – плоскости антисимметрии. Напряжённое состояние в составных

слоях, находящихся между плоскостями симметрии  $y = (2k-1)h$  и  $y = (2k+1)h$ , будет одинаковым. Следовательно, можно рассмотреть напряжённое состояние только двухкомпонентного слоя (базовой ячейки) между плоскостями антисимметрии  $y = \pm h$  (рис. 1).

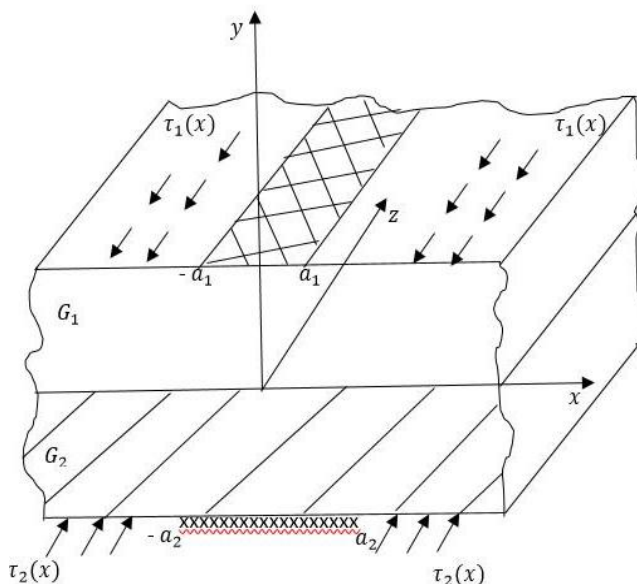


Рис. 1. Базовая ячейка / Fig. 1. Base cell

Для базовой ячейки поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} W_j(x, (-1)^{j+1}h) = 0, & x \notin L_j; \quad j = 1, 2, \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0), & -\infty < x < \infty, \\ W_1(x, 0) = W_2(x, 0), & -\infty < x < \infty, \\ \tau_{yz}^{(j)}(x, (-1)^{j+1}h) = -\tau_j(x), & x \in L_j. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $W_j(x, y)$ ,  $j = 1, 2$ , – компоненты смещений точек первого и второго слоев соответственно. Каждая из них в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа. Связь с компонентами напряжений  $\tau_{yz}^{(j)}(x, y)$  определяется соотношениями  $\tau_{yz}^{(j)}(x, y) = G_j \frac{\partial W_j(x, y)}{\partial y}$ .

Для решения поставленной задачи введём в рассмотрение неизвестные контактные напряжения, действующие в срединных плоскостях разнородных слоев:

$$\tau_{yz}^{(j)}(x, (-1)^{j+1}h) = q_j(x), \quad |x| < a_j, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

Решим вспомогательную задачу, заменив первые условия (1) соотношениями (2).



Для этого решения уравнений Лапласа представим в виде интегралов Фурье

$$W_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_j(s)e^{sy} + B_j(s)e^{-sy}]e^{-isx} ds, \quad j=1,2.$$

Удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи. Выразим неизвестные коэффициенты  $A_j(s)$  и  $B_j(s)$ ,  $j=1,2$ , через трансформанты Фурье функций  $\tau_j(x)$ ,  $j=1,2$ . Получим

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 e^{-2\beta} + e^{-\beta} \bar{Q}_1(s) / (sG_1), \\ A_2 &= B_2 e^{2\beta} + e^{\beta} \bar{Q}_2(s) / (sG_2), \\ B_1 &= \frac{ch\beta - Gsh\beta}{sG_1(G+1)sh(2\beta)} \bar{Q}_1(s) - \frac{e^{\beta}}{sG_1(G+1)sh(2\beta)} \bar{Q}_2(s), \\ B_2 &= \frac{e^{-\beta}}{sG_1(G+1)sh(2\beta)} \bar{Q}_1(s) - \frac{Gch\beta + sh\beta}{sG_2(G+1)sh(2\beta)} \bar{Q}_2(s), \end{aligned}$$

где  $Q_j(x) = \begin{cases} q_j(x), & x \notin L_j \\ -\tau_j(x), & x \in L_j \end{cases}$ ,

$$\bar{Q}_j(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j(x)e^{isx} dx, \quad \beta = sh; \quad G = \frac{G_2}{G_1}.$$

Используя полученные выражения для коэффициентов  $A_j$  и  $B_j$ ,  $j=1,2$ , и значения известных интегралов [10, 11]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} cth(sh)e^{ist} ds &= \frac{\pi i}{h} cth \frac{\pi t}{2h}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} th(sh)e^{ist} ds &= \frac{\pi i}{h sh(\pi t / (2h))}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ist}}{sh(2hs)} ds &= \frac{\pi i}{2h} th \frac{\pi t}{4h}, \end{aligned}$$

определим производные от смещений точек лицевых плоскостей базового слоя. Получим

$$\begin{aligned} W_1'(x, h) &= \\ &= \frac{1}{G_1(G+1)} \left\{ \frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{G + ch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2h} \int_{-a_2}^{a_2} \frac{1 - ch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_2(s) ds - f_1(x) \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_2'(x, -h) &= \\ &= \frac{1}{G_2(G+1)} \left\{ \frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Gch(\mu(s-x)) - G}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{1}{2h} \int_{-a_2}^{a_2} \frac{1 + Gch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_2(s) ds - f_2(x) \right\}.$$

Здесь  $f_1(x) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{G + ch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} \tau_1(s) ds -$   
 $-\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a_2} \int_{a_2}^{\infty} \frac{ch(\mu(s-x)) - 1}{sh(\mu(s-x))} \tau_2(s) ds,$   
 $f_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{Gch(\mu(s-x)) - G}{sh(\mu(s-x))} \tau_1(s) ds -$   
 $-\frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a_2} \int_{a_2}^{\infty} \frac{1 + Gch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} \tau_2(s) ds,$   
 $\mu = \pi / (2h), \quad -\infty < x < \infty.$

При помощи (3) удовлетворим первым двум соотношениям (1). Для определения контактных напряжений  $q_j(x)$ ,  $j=1,2$ , придём к следующей системе определяющих сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{G + ch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds - \\ - \frac{1}{2h} \int_{-a_2}^{a_2} \frac{ch(\mu(s-x)) - 1}{sh(\mu(s-x))} q_2(s) ds = f_1(x), \quad |x| < a_1, \\ \frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{Gch(\mu(s-x)) - G}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds - \\ - \frac{1}{2h} \int_{-a_2}^{a_2} \frac{1 + Gch(\mu(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_2(s) ds = f_2(x), \quad |x| < a_2. \end{cases} \quad (4)$$

Система (4) по своей структуре точно совпадает с определяющей системой уравнений для определения дислокаций точек берегов конечной трещины [9]. Систему (4) нужно рассматривать вместе с условиями равновесия

$$\begin{aligned} \int_{-a_1}^{a_1} q_1(s) ds &= \int_{-\infty}^{-a_1} \int_{a_1}^{\infty} \tau_1(s) ds = P_1, \\ \int_{-a_2}^{a_2} q_2(s) ds &= \int_{-\infty}^{-a_2} \int_{a_2}^{\infty} \tau_2(s) ds = P_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению определяющей системы (4) при условиях (5).

Приведём также определяющее уравнение задачи в случае, когда трещины в слоях, изготовленных из второго материала, отсутствуют. Для этого заметим,

что первое условие граничной задачи (1) при  $j = 2$  имеет место при  $-\infty < x < \infty$ , а последнее условие вовсе отпадает. Вследствие этого для коэффициентов  $A_j(s)$  и  $B_j(s)$ ,  $j = 1, 2$ , получаются выражения:

$$A_1 = B_1 e^{-2\beta} + e^{-\beta} \overline{Q_1}(s) / (sG_1), \quad A_2 = B_2 e^{2\beta},$$

$$B_1 = -\frac{(Gch\beta - sh\beta)\overline{Q_1}(s)}{sG_1(G+1)[ch(2\beta) + G_*]},$$

$$B_2 = \frac{e^{-\beta}\overline{Q_1}(s)}{sG_1(G+1)[ch(2\beta) + G_*]},$$

$$G_* = (G-1)/(1+G).$$

Используя значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{sh(cx)\sin(bx)}{ch(cx) + \cos t} dx = \frac{\pi}{c} ch \frac{bt}{c} / sh \frac{b\pi}{c} \quad [10], \text{ для произ-}$$

водной от смещений точек лицевой поверхности первого из базовых слоев получим соотношение

$$W_1'(x, h) = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{G_1} \left\{ \frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{ch(\mu_0(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds - g_1(x) \right\},$$

$$\text{где } g_1(x) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{ch(\mu_0(s-x))}{sh(\mu(s-x))} \tau_1(s) ds,$$

$$\mu_0 = \frac{t_0}{2\pi}; \quad t_0 = \arccos G_*.$$

При помощи (6) удовлетворим первому из условий граничной задачи (1) при  $j = 1$ . Придём к сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{ch(\mu_0(s-x))}{sh(\mu(s-x))} q_1(s) ds = g_1(x), \quad (7)$$

$$-a_1 < x < a_1,$$

которое нужно рассматривать при первом условии из (5).

Заметим, что в случае однородной плоскости  $G_* = 0$ . Следовательно,  $t_0 = \pi/2$ . Тогда уравнение (7) примет вид

$$\frac{1}{4h} \int_{-a_1}^{a_1} \frac{q_1(s) ds}{sh(\mu(s-x)/2)} = g_1(x), \quad -a_1 < x < a_1,$$

$$\text{где на этот раз } g_1(x) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{-a_1} \int_{a_1}^{\infty} \frac{\tau_1(s) ds}{sh(\mu(s-x)/2)}.$$

Отметим, что то же самое уравнение можно получить и из системы (4), приняв  $G = 1$ ,  $a_1 = a_2$ ,  $q_1(x) = q_2(x)$ ,  $\tau_1(x) = \tau_2(x)$  и заменив  $h$  на  $2h$ .

### Равномерно кусочно-однородное пространство с периодической системой одинаковых параллельных внутренних трещин

Сначала обсудим частный случай поставленной задачи, когда трещины в разнородных слоях имеют одинаковые размеры, т.е. когда  $a_1 = a_2 = a$ . В этом частном случае, как и в [10], введём новые искомые функции по формулам

$$\varphi_1(x) = q_1(x) - q_2(x); \quad \varphi_2(x) = Gq_1(x) + q_2(x). \quad (8)$$

Систему определяющих уравнений (4) перепишем в виде двух независимых сингулярных интегральных уравнений

$$\frac{1}{2h} \int_{-a}^a ch\mu(s-x)\varphi_1(s) ds = F_1(x), \quad |x| < a,$$

$$\frac{1}{2h} \int_{-a}^a \frac{\varphi_2(s)}{sh\mu(s-x)} ds = F_2(x), \quad |x| < a, \quad (9)$$

$$\text{где } F_1(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)}{G+1}, \quad F_2(x) = \frac{Gf_1(x) - f_2(x)}{G+1}.$$

Условия (5) при этом принимают вид

$$\int_{-a}^a \varphi_1(s) ds = T_1, \quad \int_{-a}^a \varphi_2(s) ds = T_2, \quad (10)$$

$$T_1 = P_1 - P_2, \quad T_2 = GP_1 + P_2.$$

Общие решения уравнений (9), соответственно, записываются следующим образом [10]:

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2\omega_*(x)} \left[ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(s) F_1(s) ds}{sh\mu(s-x)} - \sqrt{2} C_1 e^{\mu x} \right], \quad (11)$$

$$\varphi_2(x) = -\frac{1}{2\omega_*(x)} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) e^{\mu(s-x)} F_2(s) ds}{sh\mu(s-x)} - \sqrt{2} C_2 \right\},$$

$$\omega_*(x) = \sqrt{ch(2\mu a) - ch(2\mu x)}, \quad |x| < a,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные, подлежащие определению.

Удовлетворив условиям (10) для этих постоянных, получим выражения

$$C_1 = T_1/h; \quad C_2 = (2\mu T_2 + I_1)/I_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta} \omega(\eta)} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\omega(\xi) F_2(\ln \xi / 2\mu) d\xi}{\sqrt{\xi}(\xi - \eta)},$$

$$I_2 = \frac{2}{\sqrt{b_1}} F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right), \quad \omega(\eta) = \sqrt{(\eta - a_1)(b_1 - \eta)},$$

$$k_1 = \sqrt{1 - a_1/b_1}, \quad a_1 = e^{-2\mu a}, \quad b_1 = e^{2\mu a}.$$

Далее, используя формулы (8), (11), для контактных напряжений получим соотношения

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= \\
 &= -\frac{1}{2(G+1)\omega_*(x)} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) [F_1(s) + e^{\mu(s-x)} F_2(s)] ds}{sh\mu(s-x)} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} (C_1 e^{\mu x} + C_2) \right\}, \quad (12) \\
 q_2(x) &= \\
 &= -\frac{1}{2(G+1)\omega_*(x)} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) [-GF_1(s) + e^{\mu(s-x)} F_2(s)] ds}{sh\mu(s-x)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{2} (GC_1 e^{\mu x} - C_2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай нагружения трещин, когда  $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ . Учитывая, что в этом случае  $f_1(x) = -f_2(x) = (G+1)f(x)$ , из (12) для контактных напряжений и коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений получим формулы

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= \\
 &= q_2(x) = \frac{1}{2\omega_*(x)} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) e^{\mu(s-x)} f(s) ds}{sh\mu(s-x)} - \sqrt{2} C_2 \right\},
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{1}{2h} \int_{-\infty}^{-a} \int_a^{\infty} \frac{\tau_1(s) ds}{sh(\mu(s-x))},$$

$$\begin{aligned}
 K_{III}^{(1)}(\pm a) &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} \sqrt{|x \mp a|} q_1(x) = \\
 &= -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2sh(2\mu a)(G+1)}} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) [F_1(s) + e^{\mu(s \mp a)} F_2(s)] ds}{sh\mu(s \mp a)} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{2} (GC_1 e^{\pm \mu a} + C_2) \right\}, \\
 K_{III}^{(2)}(\pm a) &= \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} \sqrt{|x \mp a|} q_2(x) = \\
 &= -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{2sh(2\mu a)(G+1)}} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-a}^a \frac{\omega_*(\xi) [e^{\mu(s \mp a)} F_2(s) - GF_1(s)] ds}{sh\mu(s \mp a)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{2} (GC_1 e^{\pm \mu a} - C_2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае контактные напряжения не зависят от упругих характеристик разнородных слоев.

### Решение определяющей системы методом механических квадратур

Построим решение определяющей системы уравнений (4) при условиях (5) в общем случае. Отметим, что если  $a_1$  и  $a_2$  произвольны, определяющую систему уравнений (4) можно решать разными методами. В частности, можно воспользоваться методом ортогональных многочленов Чебышева или методом механических квадратур. Построим решение системы (4) методом механических квадратур. Для этого её представим в виде

$$\begin{cases}
 \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} \left[ \frac{G+1}{s-x} + K_{11}(s-x) \right] q_1(s) ds - \\
 - \frac{1}{\pi} \int_{-a_2}^{a_2} K_{12}(s-x) q_2(s) ds = f_1(x), \quad -a_1 < x < a_1, \\
 \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{a_1} K_{21}(s-x) q_1(s) ds - \\
 - \frac{1}{\pi} \int_{-a_2}^{a_2} \left[ \frac{G+1}{s-x} + K_{22}(s-x) \right] q_2(s) ds = f_2(x), \quad -a_2 < x < a_2,
 \end{cases} \quad (13)$$

где  $K_{11}(x) = \frac{\mu(G + ch\mu x)}{sh\mu x} - \frac{G+1}{x}$ ,  
 $K_{12}(x) = \frac{\mu(ch\mu x - 1)}{sh\mu x}$ ,  $K_{21}(x) = \frac{\mu G(ch\mu x - 1)}{sh\mu x}$ ,  
 $K_{22}(x) = \frac{\mu(1 + Gch\mu x)}{sh\mu x} - \frac{G+1}{x}$ .

Нетрудно проверить, что ядра  $K_{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2$ , – регулярные функции. При помощи замены переменных  $s = a_1 \xi$ ,  $x = a_2 \eta$  в первом из уравнений (13) и  $s = a_2 \xi$ ,  $x = a_1 \eta$  – во втором получим систему (13) на интервале  $(-1, 1)$ . Введя новые безразмерные искомые функции по формулам  $\varphi_j(\eta) = a_j q_j(a_j \eta) / P_j$ ,  $j = 1, 2$ , придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - \eta} + K_{11}^*(\xi, \eta) \right] \varphi_1(\xi) d\xi - \\
 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{12}^*(\xi, \eta) \varphi_2(\xi) d\xi = F_1^*(\eta), \\
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{\xi - \eta} + K_{22}^*(\xi, \eta) \right] \varphi_2(\xi) d\xi - \\
 - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K_{21}^*(\xi, \eta) \varphi_1(\xi) d\xi = F_2^*(\eta), \\
 |\eta| < 1.
 \end{cases} \quad (14)$$

В (14)  $K_{11}^*(\xi, \eta) = \frac{a_1 K_{11}(a_1(\xi - \eta))}{G+1}$ ,

$$K_{12}^*(\xi, \eta) = \frac{a_1 P_2}{P_1(G+1)} K_{12}(a_2 \xi - a_1 \eta),$$

$$K_{21}^*(\xi, \eta) = \frac{P_1 a_2 K_{21}(a_1 \xi - a_2 \eta)}{P_2(G+1)},$$

$$K_{22}^*(\xi, \eta) = \frac{a_2 K_{22}(a_2(\xi - \eta))}{G+1},$$

$$F_1^*(\eta) = \frac{a_1 f_1(a_1 \eta)}{P_1(G+1)}, \quad F_2^*(\eta) = -\frac{a_2 f_2(a_2 \eta)}{P_2(G+1)}.$$

При этом условия (5) записываются следующим образом:

$$\int_{-1}^1 \varphi_j(\xi) d\xi = 1, \quad j=1,2. \quad (15)$$

Несложно проверить, что искомые функции в конечных точках интегрирования  $\pm 1$  имеют корневые особенности и их можно представить в виде

$$\varphi_j(\eta) = \frac{\varphi_j^*(x)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \quad j=1,2, \quad (16)$$

где  $\varphi_j^*(\eta)$ ,  $j=1,2$ , – непрерывные функции на отрезке  $[-1,1]$ .

Подставляя представление (16) в (14), (15) и используя соотношения, приведённые в работе [12], по стандартной процедуре придём к системе из  $2n$  алгебраических уравнений относительно значений  $\varphi_j^*(\xi_i)$ ,  $j=1,2$ ,  $i=\overline{1,n}$ . Далее при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа находятся функции  $\varphi_j(x)$ ,  $j=1,2$ , с помощью которых определяются все важные механические характеристики, описывающие напряжённо-деформированное состояние в двухкомпонентном слое.

Приведём формулы, при помощи которых вычисляются безразмерные коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в конечных точках трещин  $x = \pm a_j$ ,  $j=1,2$ . Они имеют вид

$$K_{III}^{(j)}(\pm a_j) = \sqrt{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow \pm 1 \mp 0} \sqrt{1 \mp \eta} \varphi_j(\eta) = \sqrt{\pi} \varphi_j^*(\pm 1), \quad j=1,2.$$

### Численные расчеты

Численно-аналитическим методом механических квадратур [12] проведён расчёт. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений, действующих на стыке разнородных слоев, и безразмерных коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений  $K_{III}^{(1)}(\pm a_1)$  и  $K_{III}^{(2)}(\pm a_2)$  в зависимости от изменения параметра  $l = h/a_1$  и отношений модулей сдвига разнородных слоев  $G$  в случае, когда  $a_1/a_2 = 0,5$ ,  $P_1 = P_2$ . При этом считается, что пространство деформируется под воздействием симметрично расположенных относительно оси  $Oy$  сосредоточенных нагрузок  $P_1/2$ , т.е. принято  $a_j \tau_j(a_j \eta) / P_j = [\delta(\eta - \eta_j) + \delta(\eta + \eta_j)]$ ,  $\eta_1 = 2, \eta_2 = 3$ ,  $j=1,2$ .

Результаты численных расчётов даны в табл. 1, 2 и на рис. 2. В табл. 1 приведены значения безразмерного коэффициента интенсивности  $K_{III}^{(j)}(\pm a_j)$ ,  $j=1,2$ , в зависимости от параметра  $l$ , когда второй из слоев в два раза жёстче, чем первый, т.е. когда  $G = 2$ .

Таблица 1

Коэффициент интенсивности в зависимости от  $l$   
 / Intensity factor depending on  $l$

$l$	0,5	1	2	5	100	1000
$K_{III}^{(1)}(\pm a_1)$	0,49419	0,58944	0,63441	0,64813	0,65145	0,65146
$K_{III}^{(2)}(\pm a_2)$	0,5003	0,62467	0,72862	0,75572	0,75693	0,75693

Из табл. 1 видно, что при увеличении параметра  $l$ , что можно трактовать как увеличение высоты слоев  $h$  при постоянном  $a_1$ , коэффициенты интенсивности  $K_{III}^{(1)}(\pm a_1)$  и  $K_{III}^{(2)}(\pm a_2)$  возрастают, стремясь к определённому пределу, соответствующему случаю однородного пространства с двумя симметричными полубесконечными трещинами, занимающими соответственно интервалы  $L_j = (-\infty, -a_j) \cup (a_j, \infty)$ ,  $j=1,2$ .

На рис. 2 приведены графики контактных напряжений в зависимости от параметра  $l$ .

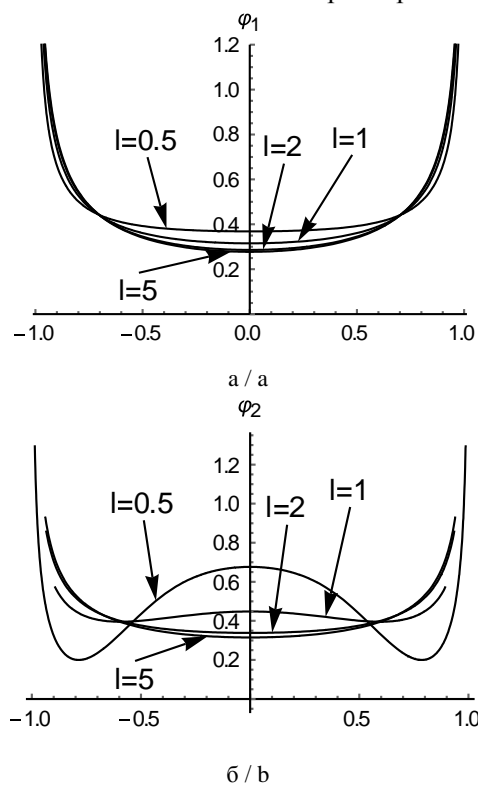


Рис. 2. Контактные напряжения в зависимости от  $l$   
 / Fig. 2. Contact stresses depending on  $l$

При увеличении  $l$  и постоянном  $a_1$  контактные напряжения на срединных плоскостях как первого, так и второго слоев в средних частях зон контактов уменьшаются, а у концов трещин – увеличиваются.

В табл. 2 и на рис. 3 приведены значения безразмерных коэффициентов интенсивности  $K_{III}^{(1)}(\pm a_1)$  и  $K_{III}^{(2)}(\pm a_2)$ , а также графики касательных контактных напряжений в зависимости от параметра  $G$  при  $l = 0,5$ .

Таблица 2

Коэффициент интенсивности в зависимости от  $G$   
 / Intensity coefficient depending on  $G$

$G$	0,1	0,5	1	5	10
$K_{III}^{(1)}(\pm a_1)$	0,63074	0,56255	0,52576	0,46644	0,45483
$K_{III}^{(2)}(\pm a_2)$	0,37948	0,4213	0,45891	0,5439	0,56417

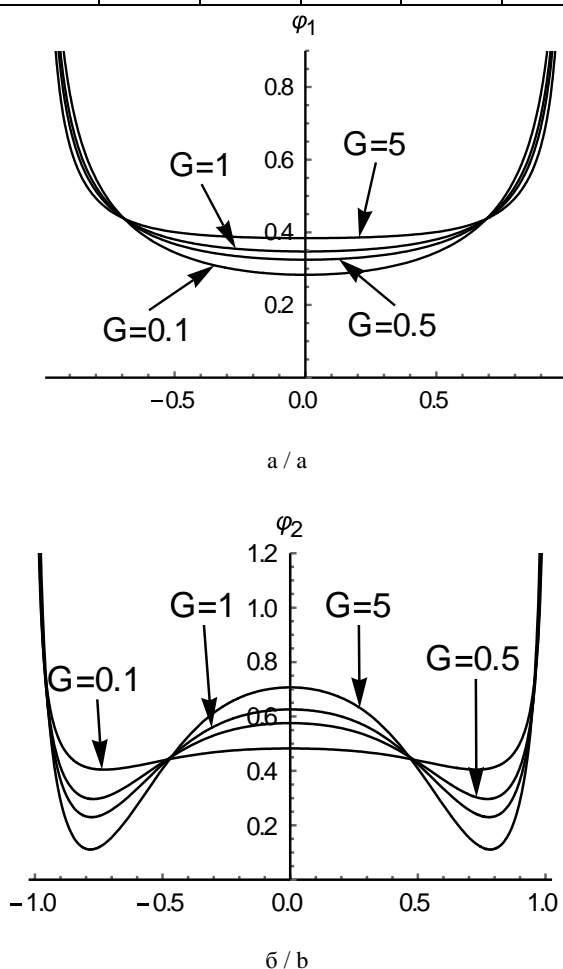


Рис. 3. Контактные напряжения в зависимости от  $G$  / Fig. 3. Contact stresses depending on  $G$

При увеличении  $G$  (что можно трактовать как увеличение  $G_2$  при постоянном  $G_1$ ) коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в

слоях из первого материала убывают, из второго – возрастают. Контактные напряжения при этом во всех слоях в средней части контактной зоны возрастают, а в концевых точках контактных зон – уменьшаются.

### Заключение

Получены определяющие уравнения антиплоской задачи теории упругости для равномерно кусочно-однородного пространства с двумя параллельными внутренними туннельными трещинами. В случае, когда в разнородных слоях имеются одинаковые центральные туннельные трещины, даётся точное решение задачи. В общем случае решение поставленной задачи построено методом механических квадратур. Получены простые формулы для определения коэффициентов интенсивности в концевых точках трещин. При помощи численных расчетов изучено поведение контактных напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в концевых точках трещин в зависимости от соотношений модулей сдвига и высоты разнородных слоев.

### Литература

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.
2. Бардзокас Д.И., Фильштинский Л.А., Фильштинский М.Л. Актуальные проблемы связанных физических полей в деформируемых телах. Москва; Ижевск, 2010. Т. 1. 864 с.
3. Мкртчян М.С., Мхитарян С.М. К задаче о напряжённом состоянии составного упругого бесконечного тела с периодической системой коллинеарных трещин при продольном сдвиге // Докл. АН Арм ССР. 1993. Т. 94, № 2. С. 104–110.
4. Акопян В.Н., Даштоян Л.Л. Разрывные решения двоякопериодической задачи для кусочно-однородной плоскости с межфазными дефектами // Механика композитных материалов. 2017. Т. 53, № 5, С. 863–879.
5. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. The stress state of a piecewise uniform layered space with doubly periodic internal cracks // J. of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991(1). P. 012031.
6. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. Напряжённое состояние кусочно-однородной равномерно слоистой плоскости с системой периодических параллельных внутренних включений // Изв. НАН РА. Механика. 2018. Т. 71, № 2. С. 3–17. DOI: 10.33018/71.2.1.
7. Акопян В.Н., Акопян Л.В., Даштоян Л.Л. Разрывные решения осесимметричной теории упругости для кусочно-однородного равномерно слоистого пространства с периодическими межфазными дискооб-

разными дефектами // Механика композитных материалов. 2019. Т. 55, № 1. С. 2–24. DOI: 10.1007/s11029-019-09788-у.

8. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. Axisymmetric stressed state of uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences. 2020. № 2 (89). P. 25–40. DOI: 10.18698/1812-3368-2020-2-25-40.

9. Hakobyan V.N., Hakobyan L.V. The stress state of uniformly piecewise heterogeneous spaces with a periodic system of parallel internal cracks // J. of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. P. 012032.

10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 738 с.

11. Брычков А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 287 с.

12. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // J. of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 991. P. 012070. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012070.

#### References

1. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976). *Stress distribution near cracks in plates and shells*. Kiev, Naukova dumka Publ., 443 p. (in Russian).

2. Bardzokas D.I., Filshtinsky L.A., Filshtinsky M.L. (2010). *Actual problems of connected physical fields in deformable bodies*. Moscow, Izhevsk, vol. 1, 864 p. (in Russian).

3. Mkrtchyan M.S., Mkhitarian S.M. (1993). On the problem of the stress state of a composite elastic infinite body with a periodic system of collinear cracks in a longitudinal shift. *Dokl. AN ArmSSR*, vol. 94, no. 2, pp. 104–110. (in Russian).

4. Akopyan V.N., Dashtoyan L.L. (2017). Discontinuous solutions of a two-period problem for a piecewise homogeneous plane with interfacial defects. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 53, no. 5, pp. 863–879. (in Russian).

5. Hakobyan V.N., Dashtoyan L.L. (2018). The stress state of a piecewise homogeneous layered space with two-period internal cracks. *J. of Physics: Conference Series*, vol. 991(1), p. 012031.

6. Akopyan V.N., Amirjanyan A.A. (2018). The stress state of a piecewise homogeneous uniformly layered plane with a system of periodic parallel internal inclusions. *Izv. NAS RA. Mechanics*, vol. 71, no. 2, pp. 3–17. DOI: 10.33018/71.2.1. (in Russian).

7. Akopyan V.N., Akopyan L.V., Dashtoyan L.L. (2019). Discontinuous solutions of the axisymmetric theory of elasticity for a piecewise homogeneous uniformly layered space with periodic interfacial disc-shaped defects. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 55, no. 1, pp. 2–24. DOI: 10.1007/s11029-019-09788-у. (in Russian).

8. Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A., Kazakov K.Ye. (2020). Axisymmetric stress state of a uniformly layered space with periodic systems of internal disc-shaped cracks and inclusions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences*, no. 2 (89), pp. 25–40. DOI: 10.18698/1812-3368-2020-2-25-40.

9. Hakobyan V.N., Akopyan L.V. (2018). The stress state of uniformly piecewise inhomogeneous spaces with a periodic system of parallel internal cracks. *J. of Physics: Conference Series*, vol. 991, p. 012032.

10. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. (1981). *Integrals and series*. Moscow, Nauka Publ., 738 p. (in Russian).

11. Brychkov A., Prudnikov A.P. (1977). *Integral transformations of generalized functions*. Moscow, Nauka Publ., 287 p. (in Russian).

12. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. (2018). Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. *J. of Physics: Conference Series*, vol. 991, p. 012070. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012070.

УДК 533.6: 534.2

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-21-28

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ РЕЖИМА РАБОТЫ ПРОПЕЛЛЕРА БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПО АКУСТИЧЕСКОМУ СИГНАЛУ\*

© 2020 г. А.А. Бондарчук<sup>1</sup>, Е.А. Казаков<sup>1</sup>, М.А. Сумбатян<sup>1</sup><sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

### IDENTIFICATION OF THE OPERATION MODE OF THE UNMANNED AIRCRAFT PROPELLER BY ACOUSTIC SIGNAL

A.A. Bondarchuk<sup>1</sup>, E.A. Kazakov<sup>1</sup>, M.A. Sumbatyan<sup>1</sup><sup>1</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Бондарчук Алексей Алексеевич – кандидат физико-математических наук, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: aabondarchuk@sfnu.ru

Alexey A. Bondarchuk - Candidate of Physics and Mathematics, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: aabondarchuk@sfnu.ru

Казаков Евгений Алексеевич – аспирант, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: Eugene.A.Kazakov@yandex.ru

Eugene A. Kazakov - Postgraduate, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: Eugene.A.Kazakov@yandex.ru

Сумбатян Межлум Альбертович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия, e-mail: sumbat@math.sfnu.ru

Mezhlum A. Sumbatyan - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: sumbat@math.sfnu.ru

Рассматривается частный случай идентификации режима работы двигателя беспилотного летательного аппарата (БПЛА) по акустическому сигналу при условии использования известного типа воздушных винтов, выделение из сигнала основной частоты и численный эксперимент. Поставлен натурный эксперимент с записью акустического сигнала реального квадрокоптера. Проведён анализ сигнала методом частотных фильтров и преобразования Фурье. Поставлен численный эксперимент над отсканированной моделью воздушного винта БПЛА, вращающегося на частоте, полученной из акустического сигнала. В эксперименте задействован гибридный метод конечных объёмов на сетке метода конечных элементов среды моделирования ANSYS CFX. Выявлены соответствие требуемой подъёмной силы с допустимой погрешностью и, как следствие, возможность идентифицировать режим работы двигателя по акустическому сигналу. Проведено сравнение натурных замеров акустического сигнала со значениями, восстановленными из численного эксперимента. Получено значительное количество данных, пригодных для использования в обратной задаче и полуданалитических методах.

**Ключевые слова:** аэродинамика, аэроакустика, летательный аппарат, метод конечных объёмов.

The paper deals with a special case of identifying the operation mode of an unmanned aircraft (UAV) engine by an acoustic signal (provided that a known type of propellers is used), the main frequency extraction from the signal, and a numerical experiment. A full-scale experiment was performed with the recording of the acoustic signal of a real quadcopter. The signal is analyzed by the method of frequency filters and Fourier transform. A numerical experiment was performed on a scanned model of a UAV propeller, rotating at a frequency obtained from an acoustic signal. The experiment involved a hybrid finite-volume method on the mesh of the finite element method of the ANSYS CFX simulation environment. The correspondence of the required lifting force with the permissible error is revealed, and as a result, the ability to identify the engine operating mode by an acoustic sig-

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), проект № 19-29-06013/19.

nal is shown. The field measurements of the acoustic signal are compared with the values recovered from a numerical experiment. A significant amount of data has been obtained suitable for use in the inverse problem and semi-analytic methods.

**Keywords:** aerodynamics, aeroacoustics, aircraft, the finite volume method.

## Введение

В условиях роста численности служебных и личных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) логичным шагом становится разработка системы контроля и регулирования движения дронов. Фундаментальная часть такой системы – идентификация БПЛА, в том числе при отсутствии визуального контакта. Неотъемлемая часть работы винтокрылого транспортного средства – уплотнение воздуха, вызываемое как вращением винтов, так и непосредственно шумом работы двигателя. Такой сигнал является одной из возможностей надёжно отследить БПЛА в пространстве и дать сведения о режиме силовой установки. Вплоть до момента массового внедрения принципиально новых типов движителей идентификация по акустическому сигналу будет являться надёжным и перспективным элементом системы контроля БПЛА.

## Постановка задачи

По звуку и аэродинамическим возмущениям, зная тип пропеллера, определить режим работы движителя и возможный груз (штатная камера, облегчённый вариант, полезная нагрузка). Зарегистрировав акустический сигнал, выявить основную частоту, численно проверить величину подъёмной силы. Провести математическое и численное моделирование на основе уравнений неразрывности, Навье – Стокса и баланса энергии, а также уравнения состояния идеального газа:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\nabla \cdot (\mu \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho q, \quad (3)$$

$$p = RT\rho. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  – плотность газа;  $T$  – температура;  $p$  – давление;  $E$  – внутренняя энергия;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости частиц газа;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор скоростей деформаций;  $\mathbf{F}$  – вектор массовых сил;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\lambda$  – коэффициент объёмной вязкости;  $k$  – коэффициент теплопроводности;  $q$  – приток тепла к частицам газа за счет излучения;  $R$  – универсальная газовая постоянная.

## Методы исследования

1. *Натурный эксперимент.* При проведении эксперимента использовался квадрокоптер DJI Mavic Air – представитель среднего класса винто-

крылых дронов. На данный момент он превосходит размерами и весом большую часть находящихся в обращении БПЛА, менее технически совершенных и грузоподъёмных. Тем не менее уже существуют более тяжёлые аппараты, в том числе оснащённые большим числом двигательных установок. В будущем доля таких дронов будет только расти. Соответственно, для эксперимента было решено остановить выбор на среднеразмерной модели.

Непосредственно эксперимент заключался в измерении и записи шумомерами акустического сигнала квадрокоптера в режиме вертикального взлёта и неподвижного зависания с последующим приземлением. Внешние факторы в виде потоков воздуха и фоновых шумов были сведены к минимуму.

2. *Сканирование.* Ключевой элемент квадрокоптера в вопросе возмущения окружающей среды – несущий винт. Модель пропеллера, необходимая для последующего вычислительного эксперимента, была создана на основе реального воздушного винта из комплектации DJI Mavic Air при помощи промышленного сканера ATOS. Устройство сканера представляет собой блок из сенсора и двух камер, ведущих одновременную запись, а также рабочую площадку, оснащённую опорными точками.

Принцип сканирования основывается на освещении исследуемого объекта интерференционными полосами с одновременной записью двумя камерами, благодаря чему достигается фазовый сдвиг, основанный на синусоидальном распределении интенсивности на чипах камер. В результате для каждого измерения создаётся переопределённая система уравнений. Независимые трёхмерные координаты вычисляются для каждого пикселя камер.

3. *Гибридный метод конечных объёмов на сетке метода конечных элементов.* Основополагающий метод среды моделирования ANSYS CFX [1] предполагает разделение исследуемой среды на отдельные элементы варьируемого размера с последующим вычислением физических величин. В рамках данной работы использовалась разбивка на тетраэдрические элементы, призматические слои не использовались. Метод позволяет изменять густоту узлов сетки в областях, представляющих исследовательский интерес, – на участках модели сложной формы с малым радиусом кривизны (вблизи передних и задних кромок лопастей) и конкретных областях пространства, в которых планируется наличие детекторов. Обратный приём укрупнения элементов в зонах, незначительных для текущего исследования, применялся для снижения нагрузки на вычислительные мощности.



В процессе расчёта ANSYS CFX моделирует среду с учётом вязкости. Для скоростей в потоке менее 100 м/с (что соответствует современным БПЛА среднего класса с характерным размером лопасти до 10 см) рассмотрение упрощается до представления среды в виде жидкости (1)–(3). Для более крупных и быстрых дронов необходимо также учитывать сжимаемость среды (4). В таких случаях идентификация сталкивается с условиями значительных угловых скоростей применительно к лопастям движителей и условно-неизвестной осевой компоненте скорости, подобно ситуации, рассмотренной в [2]. В данной работе используются представленная в ANSYS CFX модель турбулентности Shear Stress Transport (SST) и нестационарная система уравнений Навье – Стокса, включающая в себя уравнения неразрывности, моментов, баланса полной либо тепловой энергии и уравнение состояния идеального газа. Для ускорения масштабных расчётов также применимы встроенные методы акустического постпроцессинга ANSYS Fluent [3].

4. *Анализ сигнала авторским кодом через преобразование Фурье.* В данной статье исходный сигнал представляет собой амплитудно-временную характеристику на интервале времени, равном сроку натурального замера. Известно, что данная амплитудно-временная характеристика не является информативной, так как, согласно российским ГОСТам и международным стандартам, необходимо определять частотные составляющие уровня шума по давлению в дБ по октавным или третьоктавным частотным полосам. Один из методов построения таких частотных характеристик заключается в применении преобразования Фурье к вырезанной из полного спектрального состава акустического сигнала частотной полосы.

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{-i\omega t} d\omega = \int_{f_1 < |f| < f_2} e^{-2\pi i f t} df = \frac{\sin(2\pi f_2 t) - \sin(2\pi f_1 t)}{\pi t},$$

где  $g(t)$  – пробная функция, преобразование Фурье которой  $G(f)=0$  для всех  $f$  вне интервала  $(f_1, f_2)$ , а на данном интервале  $G(f) \equiv 1$ . Согласно теореме о свёртке, отфильтрованный на данном частотном интервале сигнал имеет вид

$$(A * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)g(t - \tau)d\tau.$$

### Результаты

Произведены замеры акустического сигнала реального БПЛА. Данные проанализированы для выявления распределения сигнала по частотным полосам и основной частоте, соотносящейся с оборотами пропеллера и режимом работы двигателя.

Численный эксперимент производился с применением метода разделения исследуемого объёма воздуха на субдомены. Меньший из них имеет цилиндрическую форму радиусом 7 см и высотой

1,2 см; содержит в себе воздушный винт и способен вращаться с заданной частотой. Внешний субдомен каплевидной формы с характерным размером 40 см служит для установки точек-детекторов: две из них находятся в плоскости вращения пропеллера на дистанции 12 (Monitor Point X12) и 25 см (Monitor Point X25) от оси вращения. Ещё одна (Monitor Point Zmin 015) – на ней, непосредственно под пропеллером, как показано на рис. 1.

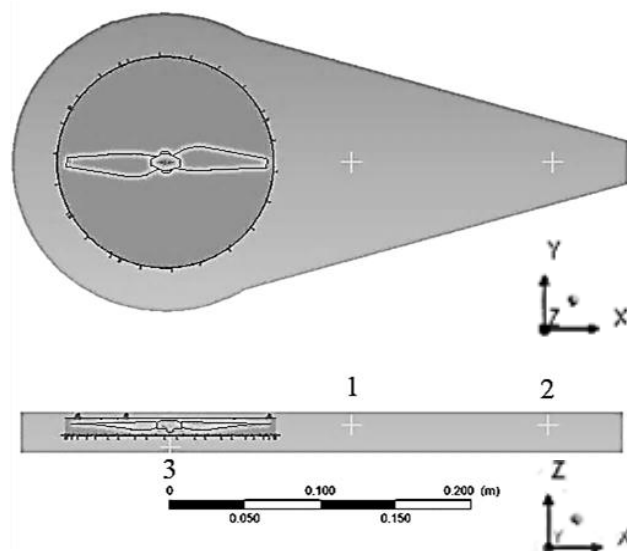


Рис. 1. Общая схема расположения детекторов в моделируемом объёме: 1 – Monitor Point X12; 2 – Monitor Point X25; 3 – Monitor Point Zmin 015 / Fig. 1. The general arrangement of the detectors in the simulated volume: 1 - Monitor Point X12; 2 - Monitor Point X25; 3 - Monitor Point Zmin 015

Расчёт проходил в четыре этапа (различающихся частотой оборотов меньшего субдомена), имитирующих практическое применение воздушного винта. Стартовая частота 150 Гц – включение и прогрев двигателя, 300 Гц – взлёт, 195–200 Гц – неподвижное зависание.

*Спектр сигнала.* Данные, представленные на рис. 2, позволяют выделить основную частоту порядка 375–400 Гц. С учётом конфигурации пропеллеров (в эксперименте используются двухлопастные) получаем 200 об/с, используемых в расчёте в качестве частоты вращения пропеллера.

*Подъёмная сила.* Согласно исследованию, в основном режиме неподвижного зависания воздушный винт действительно совершает 12 000 об/мин. В случае приёма сигнала с большей или меньшей основной частотой можно сделать вывод о том, что в данный момент наблюдаемый дрон набирает высоту либо снижается.

Рисунок 3 иллюстрирует общую картину вычислительного эксперимента: стартовая частота 150 об/с моделирует запуск и прогрев двигателя, значительный скачок подъёмной силы при 300 об/с – взлёт, затем уменьшение оборотов до 195 и 200 Гц – непо-

движное зависание и стабилизация. Зная исходную массу квадрокоптера (430 г), можно рассчитать подъемную силу, которую необходимо развивать одному отдельно взятому воздушному винту для компенсации веса дрона, что соответствует исследуемому режиму неподвижного зависания на заданной высоте. Сила вычисляется по формуле  $F_i = \frac{m \cdot g}{n}$ , где  $m$  – масса дрона;  $n$  – число несущих винтов (в нашем случае  $F_i = 1,0535$  Н). Как видно из рис. 4, величина подъемной силы, полученной в ходе численного эксперимента, осциллирует вблизи данного значения. Для повышения точности результата требуется учесть следующие дополнительные факторы:

– общую конфигурацию всех пропеллеров (число и взаимное расположение винтов может влиять

на воздушные потоки, создавая своеобразную интерференцию);

– аэродинамический вклад корпуса дрона. Сам по себе он способен влиять на подъемную силу за счёт форм потоков, прилегающих к корпусу, а также определяет схему расположения пропеллеров, задавая плоскость (а иногда – ось) симметрии;

– форму и размеры внешнего субдомена: несмотря на условие проницаемости его стенок, маленький объём исследуемой среды негативно влияет на точность вычислений, а большой – на запрашиваемые вычислительные мощности;

– параметры сетки, обеспечивающие как точность воссоздания формы реального винта, так и ресурсоёмкость и скорость расчёта.

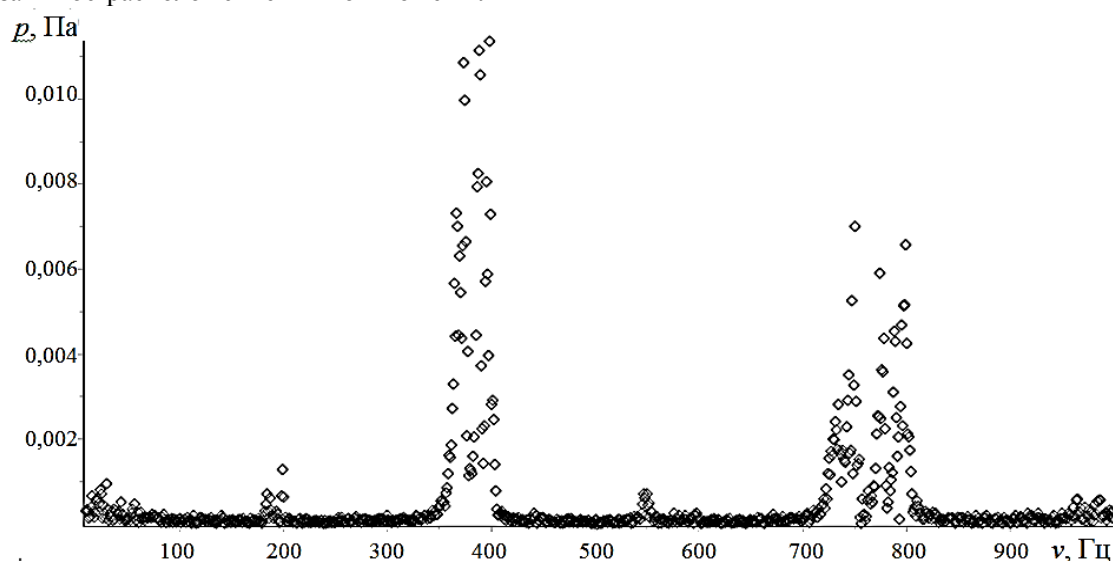


Рис. 2. Фурье-анализ сигнала, позволяющий выявить пик зависимости давления от частоты, соответствующей скорости вращения воздушного винта / Fig. 2. Fourier analysis of the signal allows one to identify the peak of pressure-frequency dependence corresponding to the speed of propeller's rotation

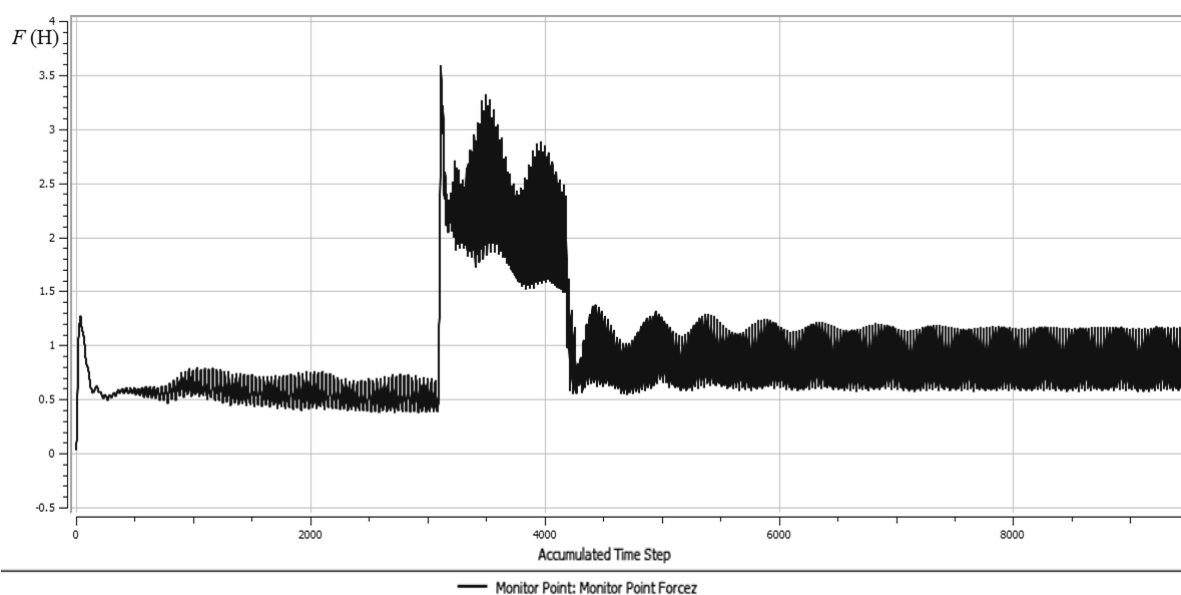


Рис. 3. Амплитудно-временная характеристика подъемной силы / Fig. 3. The amplitude-time characteristic of the lift force

*Давление.* Картина давлений (рис. 5, 6) соответствует ожиданиям. Прямая задача – получение из акустического сигнала основной частоты и, как следствие, режима оборотов двигателя – выполняется успешно. Принципиальная возможность обратной задачи – воссоздания сигнала по данным расчёта – также существует. Однако в области высоких частот различия воспроизведённой картины с наблюдаемой весьма значительны. Причиной этого могут служить как ограничения самого метода, так и отсутствие в численном эксперименте

акустического фона от шума двигателя, интерференционной картины и недостаточность параметров сетки (характерный размер элемента – 1 мм в значимых областях и до 4 см на периферии) и шага по времени (0,0001 с).

Сильное различие между расчетными и экспериментальными значениями в таблице говорит о том, что очень сложно осуществлять адекватный расчет акустических характеристик на основе аэродинамического давления.

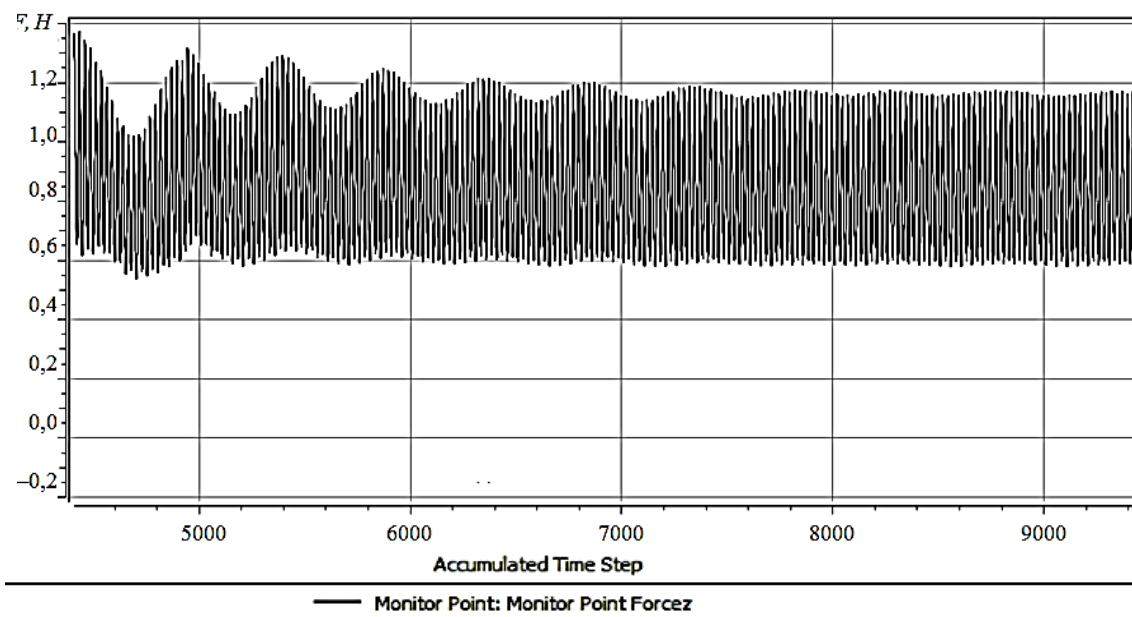


Рис. 4. Подъёмная сила на этапе установившегося режима зависания в воздухе  
 / Fig. 4. Lift force during the steady mode of hovering in the air

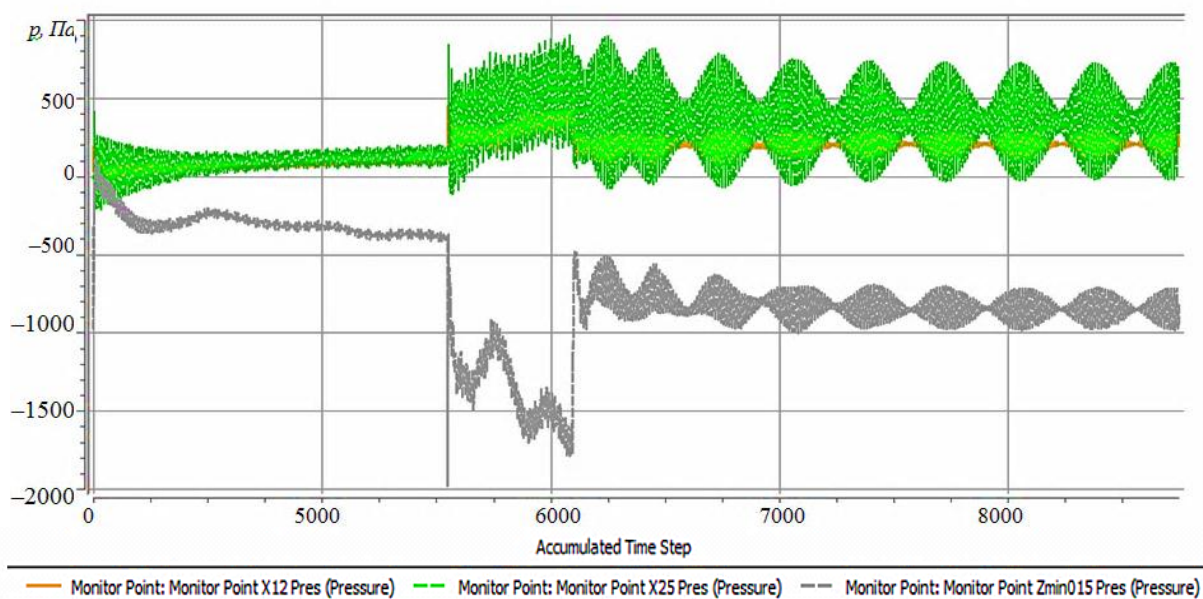


Рис. 5. Полная картина возмущений давления в точках-детекторах. Показатели в Monitor Point X12 положительны и стабильны; в Monitor Point X25 – в среднем выше и заметно осциллируют; в Monitor Point Zmin 015 – отрицательны  
 / Fig. 5. A comprehensive view of pressure disturbances at detector points. The values in Monitor Point X12 is positive and stable; in Monitor Point X25, on average, it is higher and noticeably oscillates; in Monitor Point Zmin015 it is negative

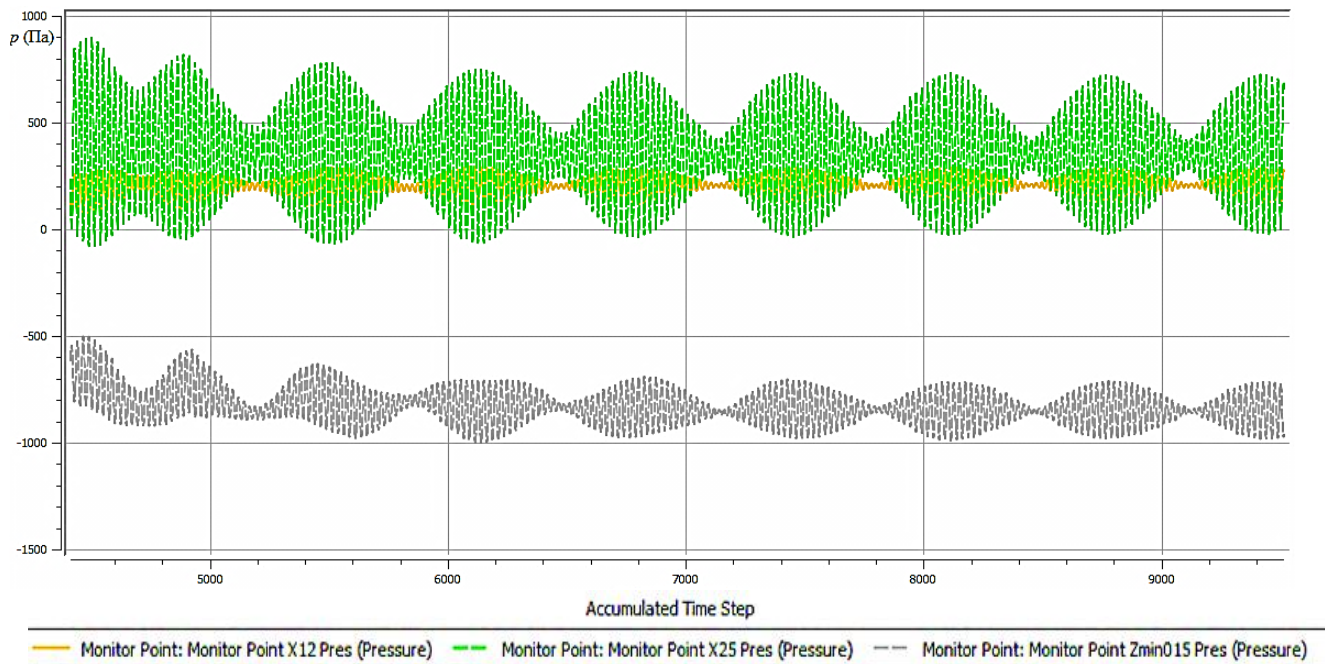


Рис. 6. Осцилляции давления при установившемся режиме зависания в воздухе  
/ Fig. 6. Pressure oscillations in the steady mode of hovering in air

**Соотношение измеренных и восстановленных значений после обработки методом частотных фильтров  
/ The ratio of measured and restored values after processing by the method of frequency filters**

Частотная полоса, Гц	Monitor Point X12, дБ	Monitor Point X25, дБ	Monitor Point Zmin 015, дБ	Натурный эксперимент, дБ
16	25	29	38	22
31,5	24	30	35	27
63	20	26	33	24
125	18	24	30	28
250	14	19	27	40
500	33	46	37	57
1000	12	20	22	51
2000	8	16	19	54
4000	9	16	20	53

Более естественно перейти к расчету акустического давления. С этой целью в дальнейших работах авторов будет использована формула Лайтхилла – Керла [4], в которую поля аэродинамических давлений и поля скоростей подставляются для вычисления акустического давления.

$$4\pi p'(x, t) = \int_V q(y, \tau) \frac{dy}{|x-y|} - \int_S \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial n_y} \frac{ds_y}{|x-y|} - \int_S \left[ \frac{p'(y, \tau)}{|x-y|^2} + \frac{1}{c_0|x-y|} \frac{\partial p'(y, \tau)}{\partial t} \right] \frac{\partial(|x-y|)}{\partial n_y} ds_y, \quad (5)$$

$$q(y, \tau) = q^{LC}(y, \tau) = \rho_0 \frac{\partial^2(v_i v_j)}{\partial x_i \partial x_j}(y, \tau),$$

$$\tau = t - \frac{|x-y|}{c_0},$$

где  $t$  – переменная времени;  $p'$  – акустическое давление как возмущение аэродинамического давления  $p$  относительно исходного уровня;  $\rho'$  – то же для массовой плотности  $\rho_0$ ;  $c_0$  – скорость звука в начальном потоке;  $\rho_0$  – невозмущённая массовая плотность;  $v_i$  – декартовы компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}=\{v_1, v_2, v_3\}$ . Точки  $x=(x_1, x_2, x_3)$  и  $y=(y_1, y_2, y_3)$  – внешние и внутренние переменные;  $V$  – рассматриваемый объём;  $S$  – жёсткая граничная поверхность;  $n_y$  – нормаль к  $S$  в точке  $y \in S$ ;  $ds_y$  – элементарная площадка  $S$  в точке  $y \in S$ ;  $dy=dy_1 dy_2 dy_3$ . Такой вид (5) имеет в случае линейного приближения для возмущений порядка малости, соответствующего соотношению  $p'=c_0^2 \rho'$ .

Формула Лайтхилла – Керла – инструмент связи аэродинамической картины среды с акустической – в рамках данной работы непосредственно не применялась, но потенциально способна преобразовать текущие результаты вычислительного эксперимента в исходные данные полуаналитических методов, аналогичных [5, 6], превосходящих численные в точности идентификации.

Заметим также, что для совместного решения стационарных и нестационарных задач конвективных и вихревых течений в аэроакустике применяются практически все известные на данный момент методы – конечных разностей [7], спектральные и псевдоспектральные, конечных и граничных элементов [8], бессеточные [9, 10], а также гибридные подходы.

### Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Извлечение из проанализированного сигнала скорости вращения винта приводит к получению в численном методе значений подъёмной силы, соответствующих реальному весу БПЛА с небольшой погрешностью.

2. При исследовании такого рода важно учитывать конфигурацию пропеллеров. В современных и перспективных моделях широко используются двухлопастные, следовательно, актуальность избранной модели высока. Рассмотрение винтов с более чем тремя лопастями нецелесообразно.

3. Существенное значение имеют число пропеллеров и аэродинамический вклад корпуса – у большинства дронов четыре винта и явная плоскость симметрии, но некоторые модели несут шесть и даже восемь двигателей.

4. Выявлено, что параметры сетки и стенок субдоменов оказывают незначительное влияние на аэродинамическую картину среды и значительное – на акустическую.

5. Установлена возможность воссоздания акустического сигнала по результатам расчёта в области низких частот. Для высокочастотной области требуются дополнительные исследования. Предположительно расхождения объясняются отсутствием учёта пространственного распределения винтов, звука двигателя, потоков вблизи корпуса дрона, а также параметрами самого метода и расчетной сетки.

6. Зная тип винтов и используя предложенные методы, можно по структуре звукового поля опре-

делить режим работы двигателя, предполагаемый груз и с практической точки зрения возможный перегруз.

Авторы с глубоким и теплым чувством вспоминают то постоянное внимание, которое основатель ростовской школы механиков академик РАН И.И. Ворович уделял развитию гидродинамики и аэродинамики на мехмате РГУ (ЮФУ).

### Литература

1. ANSYS CFX-Solver Theory Guide. Release 12.1. ANSYS, Inc., 2009. P. 2–31, 82.
2. Mescheryakov K., Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A. A boundary integral equation over the thin rotating blade of a wind turbine // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016. Vol. 71. P. 20–26.
3. ANSYS Fluent Theory Guide 15. Aerodynamically Generated Noise. ANSYS, Inc., 2009. P. 14.
4. Zampoli V., Sumbatyan M.A. Flow-induced vortex field generated by a thin oscillating plate in an aeroacoustics framework // *ZAMP*. 2019. Vol. 70, № 1. Article 33.
5. Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A., Mescheryakov K.I. An efficient numerical algorithm in the classical 3D theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid // *Mechanics Research Communications*. 2018. Vol. 89. P. 18–22.
6. Wu L., Jing X., Sun X. Prediction of vortex-shedding noise from the blunt trailing edge of a flat plate // *J. Sound Vibration*. 2017. Vol. 408. P. 20–30.
7. Schlotke-Lakemper M., Yu H., Berger S., Meinke M., Schröder W. A fully coupled hybrid computational aeroacoustics method on hierarchical Cartesian meshes // *Computers & Fluids*. 2017. Vol. 144. P. 137–153.
8. Schlegel M., Noack B., Jordan P., Dillmann A., Gröschke E., Schröder W., Tadmor G. On least-order flow representations for aerodynamics and aeroacoustics // *J. of Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 697. P. 367–398.
9. Tan J., Wang H.-W. Simulating unsteady aerodynamics of helicopter rotor with panel/viscous vortex particle method // *Aerospace Science and Technology*. 2013. Vol. 30 (1). P. 255–268.
10. Huberson S., Rivoalen E., Voutsinas S. Vortex particle methods in aeroacoustic calculations // *J. of Computational Physics*. 2008. Vol. 227. P. 9216–9240.

### References

1. ANSYS CFX-Solver Theory Guide. (2009). Release 12.1. ANSYS, Inc., pp. 2-31, 82.
2. Mescheryakov K., Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A. (2016). A boundary integral equation over the thin

rotating blade of a wind turbine. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 71, pp. 20-26.

3. *ANSYS Fluent Theory Guide 15*. (2009). Aerodynamically Generated Noise. ANSYS, Inc., p. 14.

4. Zampoli V., Sumbatyan M.A. (2019). Flow-induced vortex field generated by a thin oscillating plate in an aeroacoustics framework. *ZAMP*, vol. 70, no. 1, article 33.

5. Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A., Mescheryakov K.I. (2018). An efficient numerical algorithm in the classical 3d theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid. *Mechanics Research Communications*, vol. 89, pp. 18-22.

6. Wu L., Jing X., Sun X. (2017). Prediction of vortex-shedding noise from the blunt trailing edge of a flat plate. *J. Sound Vibration*, vol. 408, pp. 20-30.

7. Schlottke-Lakemper M., Yu H., Berger S., Meinke M., Schröder W. (2017). A fully coupled hybrid computational aeroacoustics method on hierarchical Cartesian meshes. *Computers & Fluids*, vol. 144, pp. 137-153.

8. Schlegel M., Noack B., Jordan P., Dillmann A., Gröschel E., Schröder W., Tadmor G. (2012). On least-order flow representations for aerodynamics and aeroacoustics. *J. of Fluid Mechanics*, vol. 697, pp. 367-398.

9. Tan J., Wang H.-W. (2013). Simulating unsteady aerodynamics of helicopter rotor with panel/viscous vortex particle method. *Aerospace Science and Technology*, vol. 30 (1), pp. 255-268.

10. Huberson S., Rivoalen E., Voutsinas S. (2008). Vortex particle methods in aeroacoustic calculations. *J. of Computational Physics*, vol. 227, pp. 9216-9240.

---

*Поступила в редакцию / Received*

*20 апреля 2020 г. / April 20, 2020*

---

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-29-37

## УПРОЩЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ КОНИЧЕСКОГО ШТАМПА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО С ПОКРЫТИЕМ\*

© 2020 г. А.С. Васильев<sup>1</sup>, С.С. Волков<sup>1</sup>, Е.В. Садырин<sup>1</sup>, Е.А. Кисляков<sup>1</sup>, С.М. Айзикович<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону, Россия

## SIMPLE EXPLICIT ANALYTICAL SOLUTION FOR INDENTATION OF A HALF-SPACE WITH A COATING BY A CONICAL PUNCH

A.S. Vasiliev<sup>1</sup>, S.S. Volkov<sup>1</sup>, E.V. Sadyrin<sup>1</sup>, E.A. Kislyakov<sup>1</sup>, S.M. Aizikovich<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

*Васильев Андрей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, корп. 2, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: andre.vasiliev@gmail.com*

*Andrei S. Vasiliev - Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Build 2, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: andre.vasiliev@gmail.com*

*Волков Сергей Сергеевич – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, корп. 2, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: fenix\_rsu@mail.ru*

*Sergei S. Volkov - Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Build 2, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: fenix\_rsu@mail.ru*

*Садырин Евгений Валерьевич – младший научный сотрудник, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, корп. 2, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: ghostwoode@gmail.com*

*Evgeniy V. Sadyrin - Junior Researcher, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Build 2, Rostov-on-Don, Russia, 344000, e-mail: ghostwoode@gmail.com*

*Кисляков Евгений Анатольевич – инженер, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, корп. 2, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: evgenka\_95@mail.ru*

*Evgeniy A. Kislyakov - Engineer, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Build 2, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: evgenka\_95@mail.ru*

*Айзикович Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственной технической университет, пл. Гагарина, 1, корп. 2, г. Ростов-на-Дону, 344000, Россия, e-mail: saizikovich@gmail.com*

*Sergei M. Aizikovich - Doctor of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Head of the Laboratory of Functionally Graded and Composite Materials, Research and Education Center "Materials", Don State Technical University, Gagarina Sq., 1, Build 2, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: saizikovich@gmail.com*

*Построено приближенное решение контактной задачи о вдавливании конического штампа в упругое изотропное полупространство с покрытием. Решение применимо для случаев как однородных (упругие модули постоянны), так и многослойных и функционально-градиентных покрытий (упругие модули изменяются с глубиной). Решение задачи получено с помощью двухстороннего асимптотического метода в аналитическом виде. Аппроксимация трансформанты ядра интегрального уравнения найдена в виде отношения двух квадратичных функций и содержит всего один параметр, что позволило получить явные аналитические выражения для распределения контактных напряжений и зависимости сила – осадка в упрощенном виде, удобном для инженерных расчетов. Таким образом, схема постро-*

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 20-07-00637-а, 18-07-01177-а). С.С. Волков поддержан Стипендией Президента РФ СП-3615.2018.1. Е.В. Садырин поддержан Стипендией Президента РФ СП-3672.2018.1.

ния приближенного аналитического решения существенно упрощается по сравнению с общим случаем, в котором используется произведение дробно-квадратичных функций. Проанализировано влияние параметра, характеризующего относительный модуль Юнга покрытия, на характеристики контактного взаимодействия. Исследована точность полученного решения в зависимости от отношения модулей упругости покрытия и подложки на примере серии однородных покрытий. Особое внимание уделено анализу жесткости индентирования как наиболее важной характеристике, используемой на практике при анализе эксперимента по индентированию. Результаты работы могут быть применены для описания эксперимента по наноиндентированию материалов с покрытиями коническим индентором и индентором Берковича.

**Ключевые слова:** контактная задача, индентирование, покрытия, аналитическое решение, упрощенные решения, конический индентор.

*The present paper is devoted to the construction of the approximate solution of the contact problem on a conical punch indentation into an elastic isotropic half-space with coating. The solution is suitable for both homogeneous (when elastic moduli are constant) and multilayered or functionally-graded coatings (when elastic moduli change with depth). The solution was obtained using the bilateral asymptotic method in the analytical form. The kernel transform approximation was obtained as the ratio of two quadratic functions and contains only one parameter. Thus, the scheme of the approximate analytical solution was constructed in a significantly simplified manner in comparison with the general case in which the product of fractional-quadratic functions is used. Such an approach allowed us to obtain explicit analytical expressions for the distribution of contact stresses and the force-displacement dependences in a simplified form, convenient for engineering calculations. The influence of the parameter characterizing the relative Young's modulus of the coating on the characteristics of contact interaction was analyzed. The accuracy of the obtained solution was studied depending on the ratio of the elastic moduli of the coating and the substrate using a series of homogeneous coatings as an example. Particular attention was paid to the investigation of the indentation stiffness - the most important characteristic used in experimental researches. The results of the work can be used to describe an experiment on nanoindentation of materials with coatings using either a conical or a Berkovich indenter.*

**Keywords:** contact problem, indentation, coatings, analytical solutions, simplified solutions, conical indenter.

## Введение

Модификация исходной поверхности изделий путём нанесения на них покрытий позволяет расширить сферу их применения. Становится возможным придать изделию повышенную стойкость к абразивному износу или коррозии [1], увеличить прочностные характеристики [2] или сделать материал биосовместимым [3, 4]. На практике для исследования механических характеристик покрытий как в лабораторных условиях, так и для нужд промышленности применяется наноиндентирование (совокупность методов, использующих локальное прецизионное силовое воздействие на материал и одновременную регистрацию деформационных откликов с нанометровым разрешением [5]).

Большинство современных установок для наноиндентирования снабжены программным обеспечением, позволяющим интерпретировать результаты эксперимента. В основе этого программного обеспечения лежат методы, базирующиеся на математических моделях, использующих решения классических контактных задач для изотропных однородных материалов. Так, Oliver и Pharr предложили [6], а затем модернизировали [7] метод расчёта твёрдости индентирования (твёрдости по Мейеру) и модуля Юнга однородных материалов, используя решение Снеддона для осесимметричного индентора [8]. Данный метод лежит в основе стандартов по измерению механических свойств материалов [9, 10].

Эти методы позволяют определить упругие модули объемных материалов, в ряде случаев – упругие свойства покрытий. Для этого рекомендуется проводить индентирование на глубину, не превышающую 10 % от толщины покрытия [11]. Однако эти методы могут принципиально занижить или завязать искомые значения характеристик при достаточно большом различии модулей упругости покрытия и подложки. Также следует учитывать, что при исследовании тонких покрытий рекомендуемая глубина внедрения индентора может оказаться сопоставимой с высотой дефектов или шероховатости, что влечёт за собой высокие погрешности измерений и некорректно полученные результаты.

Для изучения свойств таких покрытий, а также тонких плёнок и однородных покрытий в случае значительного отличия свойств покрытия и подложки необходимо прибегать к методам, в основе которых лежат математические модели, использующие решения контактных задач для тел с покрытиями. Чаще всего исследование таких задач сводится к решению сингулярных интегральных уравнений различными методами: регулярным [12], сингулярным [13], асимптотическим, ортогональных многочленов [14], коллокаций [15, 16], двухсторонним асимптотическим [17]. Для решения контактных задач используются также и прямые численные методы, такие как метод конечных элементов [18].

В основе двухстороннего асимптотического метода лежит идея многопараметрической аппроксими-



мации трансформанты ядра интегрального уравнения отношением двух полиномов четных степеней. Данный метод позволяет получить решение, эффективное для покрытий любой толщины в аналитическом виде [19, 20].

Однако построение многопараметрической аппроксимации на практике требует проведения затратных численных расчетов и постоянного контроля их точности, что может вызывать трудности при проведении инженерных исследований.

Настоящая статья посвящена построению решения контактной задачи о вдавлении конического индентора с помощью двухстороннего асимптотического метода с использованием однопараметрической аппроксимации. Такой подход позволяет получить приближенное решение задачи в явном аналитическом виде, при этом максимально упростить схему численных вычислений. Работа продолжает начатые авторами ранее исследования, посвященные разработке упрощенных решений контактных задач о вдавлении [21, 22].

### Постановка задачи

Недеформируемый индентор конической формы с углом раствора при вершине  $2\alpha$  вдавливается в поверхность упругого полупространства с покрытием толщиной  $H$ . С полупространством связана цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$ ; ось  $z$  нормальна поверхности покрытия  $z=0$  и проходит через центр индентора. Под действием нормально приложенной силы  $P$  штамп перемещается в поверхность покрытия на глубину  $\delta$ , при этом радиус области контакта равен  $a$ . Силы трения между индентором и полупространством предполагаются отсутствующими.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона полупространства изменяются с глубиной по непрерывно дифференцируемым независимым друг от друга законам:

$$\{E, \nu\} = \begin{cases} \{E^{(c)}(z), \nu^{(c)}(z)\}, & -H \leq z \leq 0; \\ \{E^{(s)}, \nu^{(s)} = \text{const}\}, & -\infty < z < -H. \end{cases}$$

Здесь и далее индекс  $(c)$  соответствует покрытию,  $(s)$  – подложке.

Граничные условия на поверхности полупространства имеют вид

$$z = 0: \tau_{rz} = 0, \begin{cases} \sigma_z = 0, & r > 1, \\ w = -\delta + r\chi, & r \leq 1. \end{cases}$$

Считаем, что на интерфейсе покрытие – подложка ( $z = -H$ ) выполнены условия идеального сцепления:

$$\tau_{zr}^{(c)} = \tau_{zr}^{(s)}, \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, w^{(c)} = w^{(s)}, u^{(c)} = u^{(s)}.$$

Выше использованы обозначения:  $r = r'/a$  – безразмерная координата;  $\chi = \text{actg}(\alpha)$  – глубина контакта;  $\tau_{rz}$  и  $\sigma_z$  – компоненты тензора напряжений;  $u, w$  – смещения вдоль осей  $r$  и  $z$ .

Требуется найти распределение контактных давлений под штампом  $\sigma_z|_{z=0} = -p(r)$ ,  $r \leq 1$ , и связь между силой, осадкой индентора и радиусом области контакта. Считаем, что края индентора не врезаются в поверхность покрытия и на краю области контакта выполнено условие непрерывности контактных напряжений:  $p(1)=0$ . Напряжения и перемещения затухают при  $r \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow -\infty$ .

### Решение задачи

Используя технику интегральных преобразований, рассматриваемую задачу сводим к решению следующего интегрального уравнения [19]:

$$\int_0^1 p(t) t dt \int_0^\infty L(u) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(ut\lambda^{-1}) du = \lambda E_{ef}^{(c)} (\delta - r\chi) / (2a), \quad r \leq 1.$$

Здесь  $E_{ef}^{(c)} = E(0) / (1 - \nu^2(0))$  – эффективный упругий модуль, характеризующий поверхность покрытия;  $L(u)$  – трансформанта ядра интегрального уравнения;  $\lambda = H/a$  – безразмерная толщина покрытия.

Для решения интегрального уравнения используем приближенный аналитический метод [17], позволяющий получить решение контактной задачи, эффективное во всем диапазоне геометрического параметра задачи  $\lambda$ . Для этой цели аппроксимируем функцию  $L(u)$  выражением

$$L(u) \approx L_N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad A_i, B_i \in \mathbb{C}.$$

Распределение контактных давлений и вдавливающая сила имеют вид [19]

$$p(r) = \frac{E_{ef}^{(s)}}{2} \frac{\chi}{a} \left( \text{arcch} \left( \frac{1}{r} \right) + \sum_{i=1}^N (C_i Z_s(r, A_i \lambda^{-1}) + D_i Z_c(r, A_i \lambda^{-1})) \right), \quad (1)$$

$$P = \frac{\pi a E_{ef}^{(s)} \chi}{2} \left( 1 + 2\lambda \sum_{i=1}^N \left( \frac{C_i}{A_i} \left[ \text{ch} \left( \frac{A_i}{\lambda} \right) - \frac{\lambda}{A_i} \text{sh} \left( \frac{A_i}{\lambda} \right) \right] + \frac{D_i}{A_i} \left[ \frac{\lambda}{A_i} - \frac{\lambda}{A_i} \text{ch} \left( \frac{A_i}{\lambda} \right) + \text{sh} \left( \frac{A_i}{\lambda} \right) \right] \right) \right), \quad (2)$$

где  $Z_{\{s,c\}}(r, A) = \int_r^1 \frac{\{\text{sh}, \text{ch}\}(At)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt$ ,

$$E_{ef}^{(s)} = E^{(s)} / \left( 1 - (\nu^{(s)})^2 \right).$$

Постоянные  $C_i$  и  $D_i$ , ( $i=1, \dots, N$ ) определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N \frac{D_i}{A_i^2 - B_k^2} = B_k^{-2}, \quad k=1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{A_i \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + B_k \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})}{A_i^2 - B_k^2} =$$

$$= B_k^{-1} - \sum_{i=1}^N D_i \frac{B_k \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + A_i \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})}{A_i^2 - B_k^2}, \quad k=1, \dots, N.$$

Связь между глубиной внедрения штампа и радиусом области контакта определяется выражением

$$\delta = \frac{\pi \operatorname{actg}(\alpha)}{2} \left( 1 + \right. \quad (3)$$

$$\left. + \sum_{i=1}^N \frac{\lambda}{A_i} [C_i \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + D_i \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})] \right).$$

Аппроксимацию трансформанты ядра будем строить таким образом, чтобы выполнялись равенства  $L_N(0)=L(0)$ ,

$$L(0) = E_{ef}^{(c)} / E_{ef}^{(s)}.$$

Для оценки влияния покрытия на перераспределение контактных напряжений, вдавливающую силу и глубину внедрения введем безразмерные величины:

$$P_0(\lambda) = \frac{P}{P_{\text{hom}}}, \quad p_0(r) = \frac{p(r)}{p_{\text{hom}}(r)}, \quad \delta_0(\lambda) = \frac{\delta}{\delta_{\text{hom}}}. \quad (4)$$

Выражения

$$P_{\text{hom}} = \frac{\pi a E_{ef}^{(s)} \chi}{2}, \quad p_{\text{hom}}(r) = \frac{E_{ef}^{(s)} \chi}{2} \operatorname{arch}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\delta_{\text{hom}} = \frac{\pi \operatorname{actg}(\alpha)}{2} \quad (5)$$

описывают аналогичные величины для однородного полупространства с упругими свойствами, соответствующими свойствам подложки.

На практике для анализа эксперимента по индентированию часто используется функция жесткости индентирования, которая определяется выражением  $S=dP/d\delta$  [6]. Из (2) с учетом (4) и (5) получим

$$S = 2a E_{ef}^{(s)} S_0(\lambda), \quad S_0 = \frac{P_0(\lambda)}{\delta_0(\lambda)}. \quad (6)$$

Эта величина находится из эксперимента по индентированию (угол наклона касательной к кривой разгрузки в точке, соответствующей максимальному значению нагрузки).

Рассмотрим случай  $N=1$ .

$$D = \frac{A^2 - B^2}{B^2},$$

$$C = \frac{(A^2 - B^2)}{B^2} \cdot \frac{(B - B \operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) - A \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))}{(A \operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + B \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))}.$$

Введем параметр  $\beta = E_{ef}^{(s)} / E_{ef}^{(c)}$ , характеризующий относительные упругие свойства покрытия/подложки. Выражения (1)–(3), (6) в случае  $N=1$  могут быть существенно упрощены:

$$p(r) = \frac{E_{ef}^{(s)} \chi}{2a} \left( \operatorname{arcch}\left(\frac{1}{r}\right) + (\beta^{-1} - 1) \times \right. \quad (7)$$

$$\left. \times \left( \frac{((1 - \operatorname{ch}(A\lambda^{-1}))\sqrt{\beta} - \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))}{(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + \sqrt{\beta} \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))} Z_s\left(r, \frac{A}{\lambda}\right) + Z_c\left(r, \frac{A}{\lambda}\right) \right) \right),$$

$$P_0 = 1 + \frac{2\lambda^2(\beta^{-1} - 1)(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) - 1)(A\sqrt{\beta} + 1)}{A^2(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + \sqrt{\beta} \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))},$$

$$\delta_0 = 1 + \frac{\lambda(\beta^{-1} - 1)(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) - 1)\sqrt{\beta}}{A(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + \sqrt{\beta} \operatorname{sh}(A\lambda^{-1}))}, \quad (8)$$

$$S_0 = \frac{A^2(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + \sqrt{\beta} \operatorname{sh}(A\lambda^{-1})) + 2\lambda^2(\beta^{-1} - 1)(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) - 1)(A\sqrt{\beta} + 1)}{A(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) + \sqrt{\beta} \operatorname{sh}(A\lambda^{-1})) + \lambda(\beta^{-1} - 1)(\operatorname{ch}(A\lambda^{-1}) - 1)\sqrt{\beta}}.$$

Формулы (1)–(3), (6)–(8) являются асимптотически точными для больших и малых значений геометрического параметра задачи  $\lambda$  [17]. Для средних значений  $\lambda$  погрешность решения зависит от точности аппроксимации трансформанты ядра.

### Численные результаты

Пусть модуль Юнга подложки равен некоторому значению  $E_0$ , а коэффициент Пуассона покрытия и подложки равен 0,33. Рассмотрим набор однородных покрытий, для которых  $\beta=0,1; 0,2; 0,5; 2; 5$  и 10. Для них построены аппроксимации однопараметрические с погрешностью, не превышающей 18,4; 11,8; 4,2; 4,3; 12,6 и 20,7 % соответственно, и многопараметрические с погрешностью, не превышающей 0,2 % (число членов многопараметрических аппроксимаций лежит в диапазоне  $17 \leq N \leq 21$ ). Погрешность аппроксимаций вычислялась по формуле  $\Delta_L(u) = \left| 1 - \frac{L_N(u)}{L(u)} \right| \cdot 100 \%$ .

На рис. 1а – в изображены графики безразмерной силы, жесткости и глубины индентирования  $P_0$ ,  $S_0$ ,  $\delta_0$  в зависимости от параметра  $\lambda$ . Они позволяют нам понять, во-первых, как именно наличие покрытия влияет на силу, жесткость и глубину индентирования и, во-вторых, оценить погрешность упрощенных формул. Видно, что сила и жесткость индентирования для малых и больших значений  $\lambda$  отличаются в  $\beta$  раз, что, очевидно, следует из того факта, что предельные случаи  $\lambda \rightarrow 0$  и  $\lambda \rightarrow \infty$  описывают полупространство без покрытия со свойствами, соответствующими подложке и поверхности покрытия соответственно.

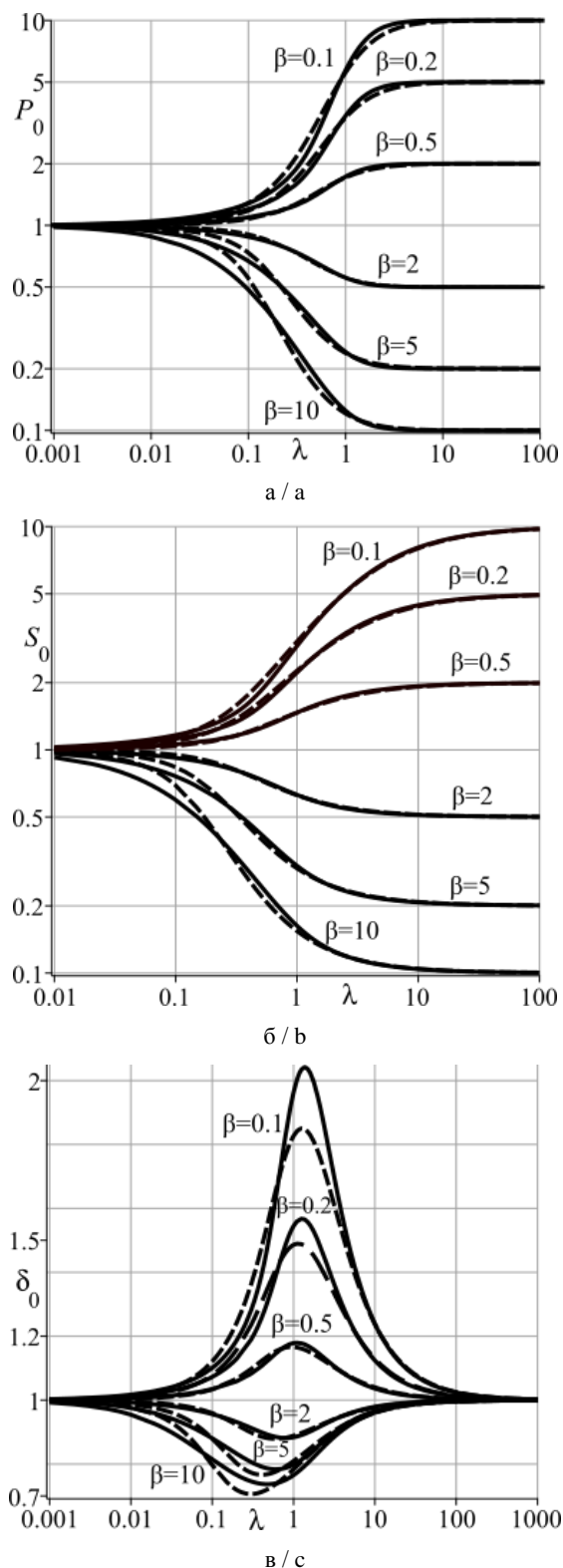


Рис. 1. а – вдавливающая сила; б – жесткость индентирования; в – глубина индентирования для покрытий в зависимости от параметра  $\lambda$  при  $N=1$  (сплошная линия) и  $N \gg 1$  (пунктирная линия) / Fig. 1. a - indentation force; b - indentation stiffness; c - indentation depth for coatings when  $N=1$  (solid line) and  $N \gg 1$  (dashed line)

Графики позволяют оценить диапазон значений параметра  $\lambda$ , при котором наблюдается существенное влияние покрытия на данные величины. Например, при  $\beta=10$  наличие покрытия существенно влияет на жесткость индентирования в диапазоне  $0,01 < \lambda < 10,00$ . Чем больше значение  $\beta$  отличается от 1, тем этот диапазон шире. Для  $\beta > 1$  (при увеличении  $\beta$ ) этот диапазон расширяется в сторону меньших значений  $\lambda$ . Для  $\beta < 1$  (при уменьшении  $\beta$ ) – в сторону больших значений  $\lambda$ . Из этого факта, в частности, следует, что при измерении модуля Юнга покрытия в случае, когда он существенно (на порядок и более) меньше модуля упругости подложки, стандартная рекомендация – проводить индентирование на глубину, не превышающую 10 % толщины покрытия [11], – может оказаться неточной и глубину индентирования следует брать существенно меньше.

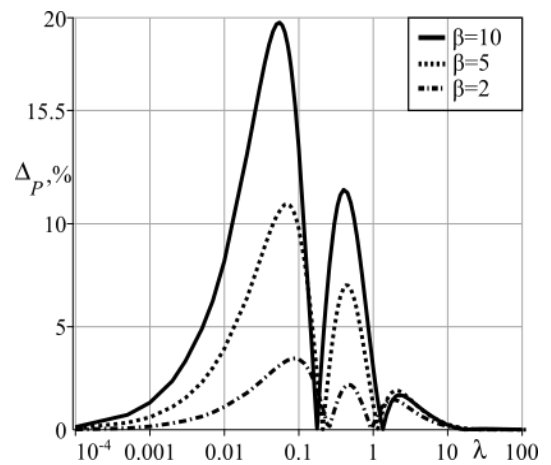
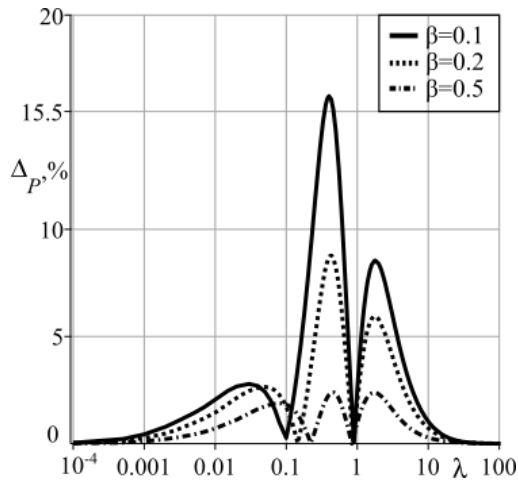
По графикам на рис. 1в можно оценить значение безразмерной глубины внедрения, соответствующей тому или иному значению  $\lambda$ . Отношение упругих модулей покрытия и подложки влияет на глубину внедрения значительно в меньшей степени, чем на силу и жесткость. Так, например, при отличии упругих модулей в 10 раз глубина индентирования максимум отличается в 2 раза.

Для анализа точности проведем сравнение результатов, полученных с помощью упрощенных формул (8) и максимально точных аппроксимаций трансформанты ядра. Рассмотрим относительные величины, характеризующие погрешность упрощенных формул

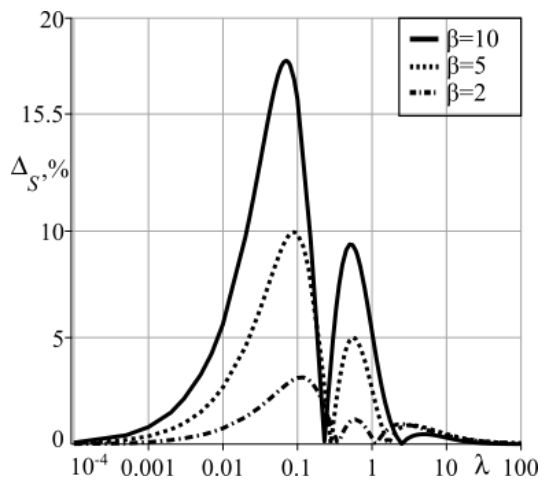
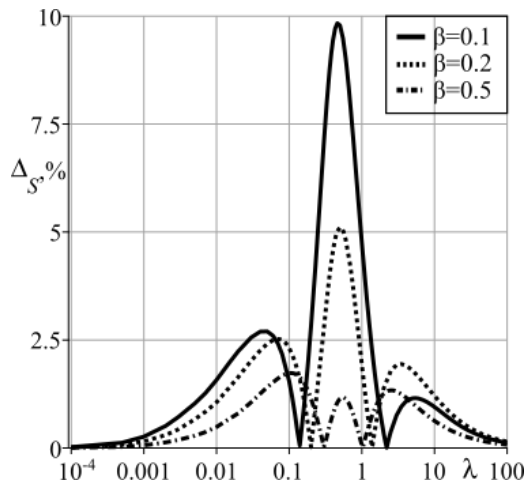
$$\Delta_{(P,S,\delta)} = \left| 1 - \frac{\{P,S,\delta\}_{N=1}}{\{P,S,\delta\}_{N>1}} \right| \times 100 \% \quad (9)$$

В таблице даны значения погрешностей однопараметрической и многопараметрической аппроксимаций, а также максимальных погрешностей упрощенных формул для силы, жесткости и глубины индентирования, рассчитанные по формуле (9). Из таблицы видно, что погрешности аппроксимации трансформанты ядра при  $N=1$  и упрощенных формул при расчете однородных покрытий являются величинами одного порядка малости. Максимальная погрешность упрощенной формулы для  $P$  составляет 0,71–0,95 % от погрешности трансформанты ядра, для  $S$  – 0,41–0,87, для  $\delta$  – 0,3–0,52 %.

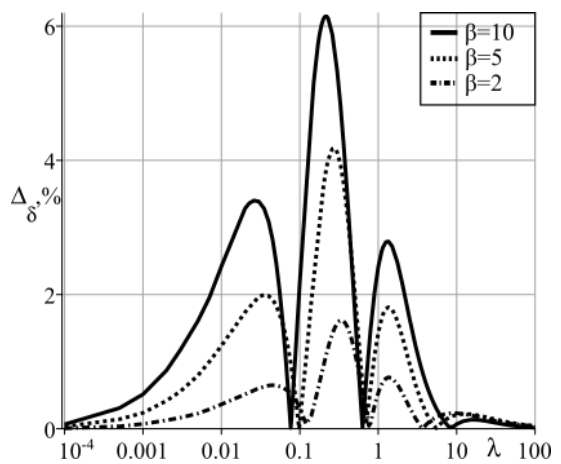
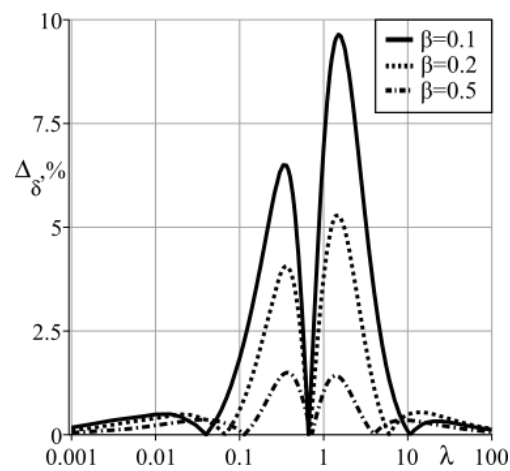
На рис. 2 изображены графики погрешности упрощенных формул (8) в зависимости от параметра  $\lambda$ . Они позволяют определить диапазоны значений параметра  $\lambda$ , в которых сосредоточена погрешность. В частности, видно, что погрешность имеет три пика. Важно заметить, что эти диапазоны зависят от способа подбора коэффициентов аппроксимации. Максимальная погрешность (которая отражена в таблице) наблюдается в очень узком диапазоне значений  $\lambda$ .



a / a



б / б



в / с

Рис. 2. Погрешность упрощенного выражения при  $\beta=0,1, 0,2, 0,5$  (слева) и  $\beta=2, 5$  и  $10$  (справа): а – для вдавливающей силы; б – для жесткости индентирования; в – для глубины индентирования / Fig. 2. The error of the simplified formula when  $\beta=0,1, 0,2, 0,5$  (left);  $\beta=2, 5$  and  $10$  (right): a - for the pressing force; b - for the indentation stiffness; c - for the indentation depth

**Сравнение погрешностей аппроксимации трансформанты и упрощенных формул для силы, жесткости и глубины индентирования / Comparison of the approximation errors of the transform and of the simplified formulas for the force, stiffness and indentation depth**

$\beta$	Погрешность аппроксимации трансформанты ядра		Максимальные погрешности упрощенных формул		
	Многопараметрическая $N \gg 1$	Однопараметрическая $N = 1$	$\max_{\lambda} \Delta_P$	$\max_{\lambda} \Delta_S$	$\max_{\lambda} \Delta_{\delta}$
0,1	0,15	18,6	16,21	9,83	9,64
0,2	0,10	11,8	8,77	5,11	5,28
0,5	0,05	4,24	2,39	1,73	1,50
2,0	0,05	4,30	3,46	3,13	1,61
5,0	0,11	12,6	10,95	9,95	4,18
10,0	0,20	20,7	19,76	18,00	6,14

### Заключение

В статье получены упрощенные аналитические выражения, описывающие решение контактной задачи о вдавлении конического штампа в полупространство с покрытием. На примере ряда однородных покрытий показано, в каких диапазонах значений параметра задачи  $\lambda$  наличие покрытия существенно изменяет решение задачи по сравнению с классическим решением для однородного полупространства без покрытия. Максимальная погрешность упрощенных формул, описывающих наиболее важные для приложений характеристики упругого контакта (сила, жесткость и глубина индентирования), для всех рассмотренных покрытий не превышает погрешности аппроксимации трансформанты ядра. Проиллюстрированы диапазоны значений параметра  $\lambda$ , в которых погрешность максимальна. Из результатов статьи следует, что во многих случаях для моделирования вдавления образца с покрытием упрощенные решения позволяют получить высокую точность результатов. При этом на практике их использование позволяет существенно упростить расчеты и анализ результатов.

### Литература

1. Белоус В.А., Леонов С.А., Носов Г.И., Хороших В.М., Ломино Н.С., Толмачева Г.Н., Бровина М.А., Ермоленко И.Г. Модификация поверхности сплава Э110 осаждением многослойных Zr/ZrN покрытий и ионным облучением // Фізична інженерія поверхні. 2009. Т. 7, № 1–2. С. 76–81.
2. Погребняк А.Д., Тюрин Ю.Н. Импульсно-плазменная модификация свойств поверхности и нанесение покрытий // Успехи физики металлов. 2003. Т. 4. С. 1–66.

3. Мейснер Л.Л., Никонова И.В., Лотков А.И., Раздорский В.В., Котенко М.В. Влияние ионно- и электронно-лучевой модификации поверхности на коррозионные свойства и биосовместимость никелида титана в экспериментах in vivo // Перспективные материалы. 2008. Т. 3. С. 15–27.

4. Mandracci P., Mussano F., Rivolo P., Carossa S. Surface treatments and functional coatings for biocompatibility improvement and bacterial adhesion reduction in dental implantology // Coatings. 2016. Vol. 6, № 1. P. 1–22.

5. Головин Ю.И. Наноиндентирование и его возможности: учеб. пособие. М.: Машиностроение, 2009. 311 с.

6. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // J. of Materials Research. 1992. Vol. 7, № 6. P. 1564–1583.

7. Oliver W.C., Pharr G.M. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology // J. of Materials Research. 2004. Vol. 19, № 1. P. 3–20.

8. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile // International J. of Engineering Science. 1965. Vol. 3, № 1. P. 47–57.

9. ISO 14577-1:2015. Metallic materials – Instrumented indentation test for hardness and materials parameters. Part 1: Test method. Brussels, 2015.

10. ГОСТ Р 8.748-2011. Металлы и сплавы. Измерение твердости и других характеристик материалов при инструментальном индентировании. Ч. 1: Метод испытаний. М., 2013.

11. Buckle H. The science of hardness testing and its research applications // American Society for Metals. 1973. 520 p.

12. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 445–455.

13. Александров В.М. Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // ПММ. 1969. Т. 33. С. 61–73.

14. Попов Г.Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 518–531.

15. Ke L.L., Wang Y.S. Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties // International J. of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, № 18–19. P. 5779–5798.

16. Guler M.A., Erdogan F. Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings // Mechanics of Materials. 2006. Vol. 38, № 7. P. 633–647.

17. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // ПММ. 1990. Т. 54. С. 872–877.

18. Wang L., Rokhlin S.I. Universal scaling functions for continuous stiffness nanoindentation with sharp indenters // International J. of Solids and Structures. 2005. Vol. 42, № 13. P. 3807–3832.

19. Айзикович С.М., Васильев А.С., Волков С.С. Осесимметричная контактная задача о вдавливании конического штампа в полупространство с неоднородным по глубине покрытием // ПММ. 2015. Т. 79, вып. 5. С. 710–716.

20. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu., Aizikovich S.M. Indentation of a hard transversely isotropic functionally graded coating by a conical indenter // International J. of Engineering Science. 2017. Vol. 112. P. 63–75.

21. Sadyrin E.V., Vasiliev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch // WIT Transactions on Engineering Sciences. 2019. Vol. 122. P. 209–221.

22. Vasiliev A.S., Sadyrin E.V., Volkov S.S., Kislyakov E.A., Sevostianov I. Construction of the simplified analytical solution of the flat punch indentation contact problem // AIP Conference Proceedings. Melville: AIP Publishing LLC, 2019. P. 040017.

## References

1. Belous V.A., Leonov S.A., Nosov G.I., Khoroshikh V.M., Lomino N.S., Tolmacheva G.N., Brovina M.A., Ermolenko I.G. (2009). Surface modification of the E110 alloy by deposition of multilayer Zr / ZrN coatings and ion irradiation. *Fizichna inzheneriya poverkhni*, vol. 7, no. 1-2, pp. 76-81. (in Russian).

2. Pogrebnyak A.D., Tyurin Yu.N. (2003). Pulse-plasma modification of surface properties and coating. *Uspekhi fiziki metallov*, vol. 4, pp. 1-66. (in Russian).

3. Meisner L.L., Nikonova I.V., Lotkov A.I., Razdorsky V.V., Kotenko M.V. (2008). The effect of ion and electron beam surface modifications on the corrosion properties and biocompatibility of titanium nickelide in vivo experiments. *Perspektivnye materialy*, vol. 3, pp. 15-27. (in Russian).

4. Mandracci P., Mussano F., Rivolo P., Carossa S. (2016). Surface treatments and functional coatings for biocompatibility improvement and bacterial adhesion reduction in dental implantology. *Coatings*, vol. 6, no 1, pp. 1-22.

5. Golovin Yu.I. (2009). *Nanoindentation and its capabilities*. Tutorial. Moscow, Mashinostroenie Publ., 311 p. (in Russian).

6. Oliver W.C., Pharr G.M. (1992). An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, vol. 7, no. 6, pp. 1564-1583.

7. Oliver W.C., Pharr G.M. (2004). Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *Journal of Materials Research*, vol. 19, no. 1, pp. 3-20.

8. Sneddon I.N. (1965). The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *International Journal of Engineering Science*, vol. 3, no. 1, pp. 47-57.

9. ISO 14577-1:2015. Metallic materials - Instrumented indentation test for hardness and materials parameters. Part 1: Test method. Brussels, 2015.

10. GOST R 8.748-2011. *Metals and alloys. Measurement of hardness and other characteristics of materials during instrumental indentation*. (2013). Part 1. Test method. Moscow. (in Russian).

11. Buckle H. (1973). *The science of hardness testing and its research applications*. American Society for Metals, 520 p.

12. Vorovich I.I., Ustinov Yu.A. (1959). On the pressure of a stamp on a layer of finite thickness. *PMM*, vol. 23, no. 3, pp. 445-455. (in Russian).

13. Alexandrov V.M. (1969). Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer. *PMM*, vol. 33, pp. 61-73. (in Russian).

14. Popov G.Ya. (1969). On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity. *PMM*, vol. 33, no. 3, pp. 518-531. (in Russian).

15. Ke L.L., Wang Y.S. (2006). Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, no. 18-19, pp. 5779-5798.

16. Guler M.A., Erdogan F. (2006). Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings. *Mechanics of Materials*, vol. 38, no. 7, pp. 633-647.

17. Aizikovich S.M. (1990). An asymptotic solution of a class of coupled equations. *PMM*, vol. 54, no. 5, pp. 719-724. (in Russian).

18. Wang L., Rokhlin S.I. (2005). Universal scaling functions for continuous stiffness nanoindentation with sharp indenters. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, no. 13, pp. 3807-3832.

19. Aizikovich S.M., Vasil'ev A.S., Volkov S.S. (2015). The axisymmetric contact problem of the indentation of a conical punch into a half-space with a coating inhomogeneous in depth. *PMM*, vol. 79, no. 5, pp. 500-505. (in Russian).

20. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu., Aizikovich S.M. (2017). Indentation of a hard transversely isotropic functionally graded coating by a conical indenter. *International Journal of Engineering Science*, vol. 112, pp. 63-75.

21. Sadyrin E.V., Vasiliev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I., Aizikovich S.M. (2019). Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a spherical punch. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, vol. 122, pp. 209-221.

22. Vasiliev A.S., Sadyrin E.V., Volkov S.S., Kislyakov E.A., Sevostianov I. (2019). Construction of the simplified analytical solution of the flat punch indentation contact problem. *AIP Conference Proceedings*. Melville, AIP Publ. LLC, p. 040017.

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-38-47

## МЕТОДЫ СТРУКТУРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И АЛЬТЕРНАТИВНОЙ КОНТИНУАЛИЗАЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ВОЛН В ГРАДИЕНТНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ\*

© 2020 г. В.И. Ерофеев<sup>1</sup>, А.В. Леонтьева<sup>1</sup>, А.О. Мальханов<sup>1</sup>, И.С. Павлов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал Института прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия

## STRUCTURAL MODELING METHODS AND ALTERNATIVE CONTINUALIZATION FOR THE ANALYSIS OF NONLINEAR LOCALIZED WAVES IN A GRADIENT-ELASTIC MEDIA

V.I. Erofeev<sup>1</sup>, A.V. Leonteva<sup>1</sup>, A.O. Malkhanov<sup>1</sup>, I.S. Pavlov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences - Branch of Institute of Applied Physics, RAS, Nizhny Novgorod, Russia

Ерофеев Владимир Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, директор Института проблем машиностроения РАН – филиала Института прикладной физики Российской академии наук, ул. Белинского, 85, г. Нижний Новгород, 603024, Россия, e-mail: erof.vi@yandex.ru

Vladimir I. Erofeev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences - Branch of Institute of Applied Physics, RAS, Belinskogo St., 85, Nizhny Novgorod, 603024, Russia, e-mail: erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения РАН – филиал Института прикладной физики Российской академии наук, ул. Белинского, 85, г. Нижний Новгород, 603024, Россия, e-mail: aleonav@mail.ru

Anna V. Leonteva - Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences - Branch of Institute of Applied Physics, RAS, Belinskogo St., 85, Nizhny Novgorod, 603024, Russia, e-mail: aleonav@mail.ru

Мальханов Алексей Олегович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем машиностроения РАН – филиал Института прикладной физики Российской академии наук, ул. Белинского, 85, г. Нижний Новгород, 603024, Россия, e-mail: alexey.malkhanov@gmail.com

Alexey O. Malkhanov - Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences - Branch of Institute of Applied Physics, RAS, Belinskogo St., 85, Nizhny Novgorod, 603024, Russia, e-mail: alexey.malkhanov@gmail.com

Павлов Игорь Сергеевич – доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе, Институт проблем машиностроения РАН – филиал Института прикладной физики Российской академии наук, ул. Белинского, 85, г. Нижний Новгород, 603024, Россия, e-mail: ispavlov@mail.ru

Igor S. Pavlov - Doctor of Physics and Mathematics, Vice-Director, Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences - Branch of Institute of Applied Physics, RAS, Belinskogo St., 85, Nizhny Novgorod, 603024, Russia, e-mail: ispavlov@mail.ru

Приведены основные принципы структурного моделирования для построения математических моделей микроструктурированных сред (обобщенных континуумов), причём микроструктура означает не малость абсолютных значений, а малость одних средних масштабов по отношению к другим. Частицы считаются недеформируемыми и однородными, без собственной внутренней структуры, присутствующей в реальных материалах. Нелинейная динамически согласованная модель градиентно-упругой среды была разработана на основе структурного моделирования с использованием метода континуализации, включающего нелокальную связь между перемещениями узлов решетки и

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 18-29-10073-мк, № 19-08-00965-а, № 20-08-00372-а, № 20-38-70158-стабильность).



полученным континуумом. Исследовано образование пространственно локализованных нелинейных волн деформации в таких средах.

**Ключевые слова:** градиентно-упругая среда, структурное моделирование, альтернативная континуализация, нелинейная волна.

*The basic principles of structural modeling for the construction of mathematical models of microstructured media (generalized continua) are given. Here, microstructure means not the smallness of the absolute values, but the smallness of some medium scales with respect to others, and the particles are considered to be non-deformable and homogeneous, without their own internal structure presenting in real materials. A nonlinear dynamically consistent model of a gradient-elastic medium has been elaborated by the method of structural modeling and using the continualization method involving nonlocality of coupling between the displacements of the lattice sites and the obtained continuum. The formation of spatially localized nonlinear strain waves in such media has been investigated.*

**Keywords:** gradient-elastic media, structural modelling method, alternative continualization, nonlinear wave.

## Введение

Механика сред с микроструктурой и тесно связанная с ней теория обобщенных континуумов из-за своей сложности и отсутствия практических потребностей многие годы оставались неостребованными. Сейчас она переживает очередной этап своего развития после работ братьев Коссера [1] и «бума» 1960-х гг., когда от неё ждали больших успехов в области континуальной теории дислокаций и механики композитов. Интерес к ней вновь начал возрастать с середины 1990-х гг. (механика разрушения [2, 3], геомеханика [4, 5], механика гранулированных материалов [6, 7], моментная теория пластичности [8]). Этот интерес продолжился и в начале XXI в., прежде всего в связи с развитием нанотехнологий [9–11] и появлением метаматериалов [12–15] – новых классов веществ со сложноорганизованной внутренней структурой. В настоящее время обобщенные континуумы (микророльные или ориентированные среды, высокоградиентные материалы, микроморфные среды, композиты, тела со слабыми или сильными нелокальными взаимодействиями) активно изучаются как теоретиками, так и экспериментаторами, специализирующимися в различных отраслях механики и физики [16]. Развивается волновая динамика сред с микроструктурой, позволяющая, в частности, предложить новые методы неразрушающего контроля напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств материалов [17–21]. Однако для адекватного описания интенсивных двумерных и трехмерных процессов в структурированных материалах средствами нелинейной волновой динамики необходима разработка новых математических моделей. Для их построения целесообразно использовать метод структурного моделирования [22–26], поскольку структурные модели содержат параметры, характеризующие геометрию материала (период решетки, размеры частиц, их

форму), и поэтому являются наиболее подходящими моделями для изучения влияния размерных эффектов на макросвойства материала.

## Принципы структурного моделирования

В процессе структурного моделирования проникновение вглубь материала является многоуровневым (многомасштабным), хотя зачастую отнести ту или иную теорию (модель) к какому-то определенному, выраженному в единицах расстояния, масштабу затруднительно. Тем не менее такого рода классификации существуют и являются полезными для оценки областей применимости различных теорий [10].

Структурная теория механики сплошных сред исходит из молекулярной, атомистической или субатомистической структуры тела. Большинство ранних структурных теорий, применяемых в механике твердого тела, представляли частицы, из которых состоит тело, как простые центры сил, наделенные массой. Эти элементы тела действуют друг на друга с помощью центральных сил. Предполагается, что силы, действующие между структурными элементами тела, быстро убывают с расстоянием и ими можно пренебречь, если расстояние между элементами превышает «радиус молекулярного действия». Метод центральных сил в применении к кристаллическим телам в зависимости от его симметрии приводит к определенным соотношениям между упругими постоянными второго порядка, которые называются соотношениями Коши. Структурные модели должны заключать в себе возможность того, что соотношения Коши между упругими постоянными могут и не сохраняться.

Еще в 1842 г. С. Пуассон сделал предположение о том, что молекулы кристалла могут представлять собой не точки, а малые твердые тела, которые не только двигаются поступательно, но и вращаются [27]. Эта идея в 1887 г. была детально разработана

В. Фойхтом [28]. В 1890 г. В. Томсон (лорд Кельвин) указал, что соотношения Коши могут быть устранены, если представить кристалл состоящим из двух проникающих друг в друга однородных точечных образований, т.е. двух подрешеток. Более общие структурные схемы кристаллических материалов были предложены М. Борном в 1915 г. В них каждый структурный элемент кристалла – элементарная ячейка – состоит из собрания притягивающихся и отталкивающихся частиц [29]. Частицы внутри каждой ячейки одинаково расположены по отношению друг к другу. Кристаллические структуры классифицируют по типу кристаллической решетки и характеру межчастичных (межатомных) связей. Классификация по кристаллическим системам дает представление о геометрических характеристиках кристалла, но не затрагивает вопроса о природе сил, удерживающих частицы (атомы, ионы, молекулы или нанокластеры) в узлах решетки. Классификация, основанная на типах сил связи, позволяет высказать некоторые обобщения относительно свойств и поведения кристаллов, чего нельзя сделать, рассматривая только геометрию решеток.

Структурное моделирование предполагает выделение в массиве материала некоторого минимального объема – структурной ячейки, отображающей основные черты макроскопического поведения материала. Ячейка рассматривается как конструкция, функционирование которой обеспечивается ее внутренним устройством и условиями сопряжения с окружением [22, 29, 30]. Отличием структурного моделирования от стандартной теории кристаллических решеток [29] является то, что в узлах кристаллической решетки располагаются не точечные материальные частицы, а тела малых, но конечных размеров, имеющие внутренние степени свободы. В качестве тел могут выступать домены, гранулы, фуллерены, нанотрубки или молекулярные кластеры. Учет микродвижений тел-частиц приводит к появлению новых типов движений. Например, учет микроповоротов относительно центров масс частиц приводит к появлению в зернистых средах волн микровращений.

Силовое взаимодействие между элементами описывается с помощью модельных потенциалов, используемых в молекулярной механике и физике твердого тела. Наличие в узлах решетки тел с конечными размерами позволяет достаточно просто ввести в рассмотрение центральные и моментные взаимодействия между частицами. Структурное моделирование учитывает параметры, характеризующие период решетки, размеры частиц и их форму, и поэтому является наиболее подходящим

методом для изучения влияния размерных эффектов на свойства материала.

Сформулируем основные принципы структурного моделирования [31]:

1. *Минимальность обобщений.* Необходимы минимальные обобщения, приводящие к новым качественным следствиям. При этом количество входящих в модель новых параметров должно быть по возможности небольшим.

2. *Вариативность модели.* Возможность достаточно широкого варьирования линейных и нелинейных параметров модели за счет выбора кинематической и силовой схем взаимодействия структурных элементов.

3. *Идентификация и верификация модели.* Проверка адекватности построенной модели реальным системам и определение связей между параметрами модели и физическими постоянными материала (плотность, пористость, модули макро- и микроупругости и т.п.). Для этого должна быть найдена связь параметров микромоделей с основными физико-механическими характеристиками среды.

4. *Принцип соответствия.* В предельных случаях новая модель, как правило, должна переходить в известные теории деформируемого твердого тела.

К достоинствам структурного моделирования относятся прозрачность связи структуры с макропараметрами среды и возможность целенаправленного проектирования сред с заданными свойствами. Недостатками являются отсутствие универсальности процесса моделирования и сложность учета нелинейных и нелокальных эффектов взаимодействия.

Перечислим основные этапы структурного моделирования.

*Геометрическое описание структуры.* В регулярной решетке, состоящей из частиц заданной формы, определяется ячейка периодичности, вводятся её характерные размеры и кинематические переменные, описывающие текущее состояние ячейки. Вычисляется кинетическая энергия.

*Моделирование силовых взаимодействий.* Так как рассматриваются малые отклонения частиц от положения равновесия, то силовые и моментные взаимодействия частиц можно описывать степенным потенциалом. В гармоническом приближении потенциал взаимодействия является квадратичной формой переменных состояния системы. Потенциальная энергия, приходящаяся на одну ячейку решетки, равна потенциальной энергии частицы, взаимодействующей со своими соседями, и, в частности, для систем с двумя пространственными переменными может быть представлена следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 U(\Delta_{nr}q^k, \varphi, \Delta_{nr}\varphi) = & \\
 = \sum_{k,s=1}^2 \sum_{n,r,l,m} \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta_{nr}q^k) \partial(\Delta_{lm}q^s)} \Delta_{nr}q^k \Delta_{lm}q^s + & \\
 + \sum_{n,r,l,m} \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta_{nr}\varphi) \partial(\Delta_{lm}\varphi)} \Delta_{nr}\varphi \Delta_{lm}\varphi + & \\
 + \sum_{k=1}^2 \sum_{n,r,l,m} \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta_{nr}q^k) \partial(\Delta_{lm}\varphi)} \Delta_{nr}q^k \Delta_{lm}\varphi + & \\
 + \sum_{k=1}^2 \sum_{n,r} \frac{\partial^2 U}{\partial(\Delta_{nr}q^k) \partial\varphi} \Delta_{nr}q^k \varphi + \frac{\partial^2 U}{(\partial\varphi)^2} \varphi^2. &
 \end{aligned}$$

Здесь  $q^k = \{q^1, q^2\} = \{u_{i,j}, w_{i,j}\}$  – компоненты вектора перемещений центра масс частицы, расположенной в узле с парой индексов  $(i, j)$ ;  $\Delta_{nr}q^k = (q_{i+n, j+r}^k - q_{i,j}^k)/a$  – величины относительного изменения расстояний между частицами;  $\Delta_{nr}\varphi = (\varphi_{i+n, j+r} - \varphi_{i,j})/a$  – величины относительного изменения углов ориентации частиц; индексы  $n$  и  $r$ , а также  $l$  и  $m$  определяют пространственные положения соседних частиц. Суммирование ведется по всем квазиупругим связям в ячейке. Вторые производные от потенциальной энергии являются постоянными величинами квазиупругих взаимодействий частиц и представляют собой элементы силовых матриц кристаллической структуры [32].

В феноменологических теориях материальные константы должны находиться опытным путем. Их связь с геометрической структурой и силовыми взаимодействиями в кристаллической решетке неясна. Из общих энергетических соображений и условий симметрии могут быть получены лишь некоторые ограничения на их значения. Структурный же подход позволяет найти явную зависимость между элементами силовых матриц и параметрами решетки. При структурном моделировании вместо полевого описания взаимодействия частиц часто вводят эквивалентную силовую схему в виде системы стержней или пружин, осуществляющих передачу сил и моментов между элементами структуры [22, 33, 34]. В данной работе применяется пружинная модель.

*Вывод уравнений движения дискретной системы.* Если найдены выражения для кинетической и потенциальной энергий взаимодействия элементов структуры, то дифференциально-разностные уравнения, описывающие динамику решетки, представляют собой уравнения Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{i,j}^{(l)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{i,j}^{(l)}} = 0, \quad (1)$$

где  $L = T_{i,j} - U_{i,j}$  – функция Лагранжа, равная разности между кинетической и внутренней энергиями ячейки;  $q_{i,j}^{(l)}$  – обобщенные координаты ( $q_{i,j}^{(1)} = u_{i,j}$ ,  $q_{i,j}^{(2)} = w_{i,j}$ ,  $q_{i,j}^{(3)} = \varphi_{i,j}$ );  $\dot{q}_{i,j}^{(l)}$  – производные по времени от обобщенных координат (обобщенные скорости).

*Континуальная аппроксимация.* Переход от дискретных моделей к континуальным производится путем экстраполяции функций, заданных в дискретных точках, непрерывными полями смещений и микроповоротов. В случае длинноволновых возмущений, когда  $\lambda \gg a$  (где  $\lambda$  – характерный пространственный масштаб деформации), от дискретных переменных  $i$  и  $j$  можно перейти к непрерывным пространственным переменным. При этом функции, заданные в дискретных точках, интерполируются непрерывными функциями и их частными производными. В зависимости от количества интерполяционных слагаемых можно рассматривать различные приближения дискретной модели зернистой среды и строить иерархию квазиконтинуальных моделей.

*Идентификация модели.* Задача идентификации – построение наилучшей (оптимальной) модели на основе экспериментальных наблюдений. Различают структурную и параметрическую идентификации. *Структурная идентификация* – это выбор оптимального вида уравнений математической модели. *Параметрическая идентификация* – это определение по экспериментальным данным значений параметров математической модели, обеспечивающих согласие рассчитанных по модели величин с экспериментальными данными при условии, что модель и объект подвергаются аналогичным воздействиям. Сюда же входят проведение численного моделирования эксперимента и подбор параметров модели с условием наилучшего совпадения результатов расчета и эксперимента. Центральным моментом параметрической идентификации является выбор переменных, которые подлежат экспериментальному измерению и несут информацию об изучаемом объекте. Так, например, в акустической спектроскопии измеряемыми величинами служат акустические характеристики среды с микроструктурой, по которым могут быть определены параметры её микромоделей. В линейном приближении акустические характеристики среды могут быть определены по дисперсионным зависимостям между частотой и длиной упругих волн. Для определения нелинейных характеристик среды нужно рассматривать ангармонические взаимодействия акустических волн различных типов между собой [18, 19], а также их взаимодействие с магнитным [35] и электрическим полями [36].

### Одномерная модель градиентно-упругого континуума

В работах [37–39] метод континуализации дискретной решетки, состоящей из одинаковых масс и пружин различной жесткости, был дополнен предположением о нелокальной связи между смещениями узлов решетки и получаемого континуума (альтернативная континуализация). Достоинством такого подхода является получение динамически непротиворечивого квазиконтинуума, описываемого дифференциальными уравнениями движения требуемого порядка, а следовательно, и точности, недостатком – недостаточная обоснованность предпосылок и преобразований. Одним из спорных предположений является замена среднего значения из нескольких дискретных функций на аналитическую функцию.

Ниже будет дано обоснование последнего предположения. Также будет получено и исследовано уравнение движения с учетом физической нелинейности. Будет показано, что данная модель позволяет описать распространение локализованных стационарных волн деформации – солитонов.

Рассмотрим длинную одномерную цепочку чередующихся одинаковых масс и пружин. Предполагаем, что массы могут смещаться только вдоль цепочки. Данное направление примем за ось  $Ox$ . Пусть  $m$  – масса частицы;  $k$  – жесткость пружины;  $l$  – расстояние между частицами;  $u_n = u_n(t)$  – смещение частицы с номером  $n$ .

Потенциальная энергия цепочки  $W$  складывается из потенциальных энергий  $\phi(\xi_n)$  всех пружин, которые зависят от смещений  $\xi_n = u_n - u_{n-1}$ .

$$W = \sum_n \phi(\xi_n) = \sum_n \phi(u_n - u_{n-1}).$$

Поскольку цель работы – исследование нелинейных волн, будем рассматривать  $\phi(\xi)$  с учетом кубического ангармонизма:  $\phi(\xi) = \frac{k\xi^2}{2} + \frac{K\xi^3}{3}$ .

Уравнение движения частицы имеет вид

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\frac{\partial W}{\partial u_n}.$$

После преобразований с учетом предыдущих соотношений

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + K(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}).$$

Построим интерполяционный полином второй степени по  $x$ , совпадающий с функцией  $u(x, t)$  в точках  $u(x_{n-1}, t) = u_{n-1}$ ,  $u(x_n, t) = u_n$ ,  $u(x_{n+1}, t) = u_{n+1}$ ,

$$\bar{u}(x, t) = u_{n-1} \frac{(x-x_n)(x-x_{n+1})}{2l^2} - u_n \frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})}{l^2} + u_{n+1} \frac{(x-x_{n-1})(x-x_n)}{2l^2}.$$

Вычислим значения интерполяционного полинома в точках  $x_n - \theta l$  и  $x_n + \theta l$ , где  $0 < \theta < 1$ .

$$\bar{u}(x_n + \theta l, t) = u_{n-1} \frac{\theta(\theta-1)}{2} + u_n(1 - \theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta(\theta+1)}{2},$$

$$\bar{u}(x_n - \theta l, t) = u_{n-1} \frac{\theta(\theta+1)}{2} + u_n(1 - \theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta(\theta-1)}{2}.$$

В качестве непрерывной функции, описывающей движение континуальной модели масс и пружин, примем среднее значение  $\bar{u}(x_n + \theta l, t)$  и  $\bar{u}(x_n - \theta l, t)$ . Получим

$$u(x, t) \approx \frac{\bar{u}(x_n + \theta l, t) + \bar{u}(x_n - \theta l, t)}{2} = u_{n-1} \frac{\theta^2}{2} + u_n(1 - \theta^2) + u_{n+1} \frac{\theta^2}{2}. \quad (2)$$

Заметим, что авторами альтернативной континуализации [37–39] непрерывная функция рассматривается как среднее между смещением трех соседних частиц, т.е.

$$u(x, t) \approx \frac{1}{1+2a_1} (a_1 u_{n-1} + u_n + a_1 u_{n+1}), \quad (3)$$

где безразмерная «весовая» константа  $a_1$  находится в диапазоне  $0 \leq a_1 < 1$ . Нетрудно заметить, что соотношения (2) и (3) идентичны, причем параметры  $a_1$  и  $\theta$  связаны следующими соотношениями:

$$\theta^2 = \frac{2a_1}{1+2a_1}, a_1 = \frac{\theta^2}{2(1-\theta^2)}.$$

При реализации метода альтернативной континуализации предполагается, что

$$u_n(t) = u(x, t) + l^2 f_2(x, t) + l^4 f_4(x, t) + O(L^5),$$

где  $f_2(x, t) = -\frac{a_1}{1+2a_1} u_{xx}(x, t) = -\frac{\theta^2}{2} u_{xx}(x, t)$ ,

$$f_4(x, t) = \frac{a_1}{12} \frac{10a_1-1}{(1+2a_1)^2} u_{xxxx}(x, t) = \frac{\theta^2}{24} (6\theta^2 - 1) u_{xxxx}(x, t).$$

Подставим (3) в (1), учитывая, что

$$u_{n+1} = u(x+l, t) + l^2 f_2(x+l, t) + l^4 f_4(x+l, t) + O(L^5),$$

$$u_{n-1} = u(x-l, t) + l^2 f_2(x-l, t) + l^4 f_4(x-l, t) + O(L^5),$$

Выразим  $u(x \pm l, t)$ ,  $u_{xx}(x \pm l, t)$ ,  $u_{xxxx}(x \pm l, t)$  через функцию  $u(x, t)$  и ее производные, используя разложение в ряд Тейлора. Получим

$$u_{tt} - \frac{l^2 \theta^2}{2} u_{xxtt} + \frac{l^4 \theta^2 (6\theta^2 - 1)}{24} u_{xxxxtt} - \frac{kl^2}{m} u_{xx} - \frac{(1-6\theta^2)kl^4}{12} \frac{1}{m} u_{xxxx} = \frac{2Kl^3}{m} u_x u_{xx} + \frac{1-3\theta^2}{3} \frac{Kl^5}{m} u_{xx} u_{xxx} + \frac{1-6\theta^2}{6} \frac{Kl^5}{m} u_x u_{xxxx}.$$

### Нелинейные волны деформации

В безразмерных переменных уравнение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \tau^2} - d_1 \left( \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^6 U}{\partial z^4 \partial \tau^2} \right) - d_2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + d_1 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + d_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} \right) = 0, \quad (4)$$

где  $U = u/u_0$ ,  $z = x/X$ ,  $\tau = t/T$  – безразмерные перемещение, координата и время соответственно. Характерные величины длины и времени равны

$$X^2 = \frac{l^2 \theta^2}{2}, \quad T^2 = \frac{m \theta^2}{2k}.$$

Безразмерные параметры имеют вид

$$d_1 = \frac{1}{\theta^2} \left( \frac{1}{6} - \theta^2 \right), \quad d_2 = \frac{2\sqrt{2}k u_0}{\theta k}, \quad d_3 = \frac{1}{\theta^2} \left( \frac{1}{3} - \theta^2 \right).$$

В переменных бегущей волны уравнение (4) примет вид

$$W_{\chi\chi\chi\chi} + \frac{(d_1 + v^2)}{d_1 v^2} W_{\chi\chi\chi} + \frac{(1 - v^2)}{d_1 v^2} W_{\chi} + \frac{d_2}{d_1 v^2} (W W_{\chi} + d_1 W W_{\chi\chi} + d_3 W_{\chi} W_{\chi\chi}) = 0, \quad (5)$$

где  $\chi = z - v\tau$  – бегущая координата;  $v$  – скорость нелинейной волны. Введение новой функции  $W = \frac{dU}{d\chi}$  позволяет понизить порядок уравнения.

Методом простейших уравнений [40] находим решение уравнения (5):

$$W(\chi) = \frac{20d_1 B_0 v^2}{d_2 (2d_1 + d_3)} (2 - 3 \operatorname{th}^2(\sqrt{B_0} \chi)) - \frac{d_1 d_3 - 3d_1 v^2 + d_3 v^2 + 2d_1^2}{d_1 d_2 (2d_1 + d_3)}, \quad (6)$$

где  $B_0^2 = -\frac{2d_1^2 + d_1 d_3 - 3d_1 + d_3}{16d_1^2 (3d_1 - d_3)}$ .

Решение (6) имеет профиль в виде симметричного колокола с переменным смещением вдоль вертикальной оси (рис. 1, пунктирная линия). Фиксируя подошву колокола на нулевой отметке (рис. 1, сплошная линия), находим ограничение, накладываемое на квадрат скорости волны

$$v^2 = -\frac{d_1 (2d_1 + d_3)}{20d_1^2 B_0 - 3d_1 + d_3}.$$

При таких скоростях решение (6) принимает вид

$$W(\chi) = -\frac{60d_1^2 B_0}{d_2 (20d_1^2 B_0 - 3d_1 + d_3) \cosh^2(\sqrt{B_0} \chi)}.$$

Это решение имеет физический смысл только в интервале  $\frac{1}{6} < \theta^2 < \frac{2}{9}$ ,  $\theta > 0$ . Зависимости амплитуды и ширины солитона от его скорости представлены на рис. 2. При увеличении параметра  $\theta$  в пределах рассматриваемого интервала скорость сначала увеличивается, затем уменьшается, амплитуда и ширина солитона при этом монотонно возрастают. Кривая  $v(\theta)$  имеет точку максимума, т.е. скорость солитона ограничена сверху.

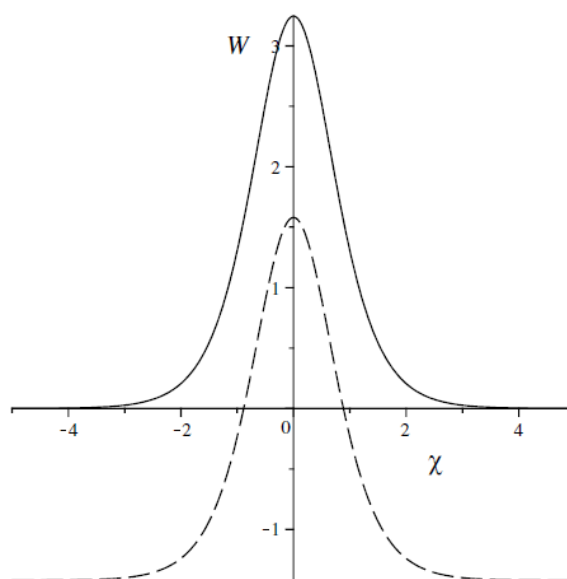


Рис. 1. Зависимость  $W(\chi)$  / Fig. 1. Dependence  $W(\chi)$

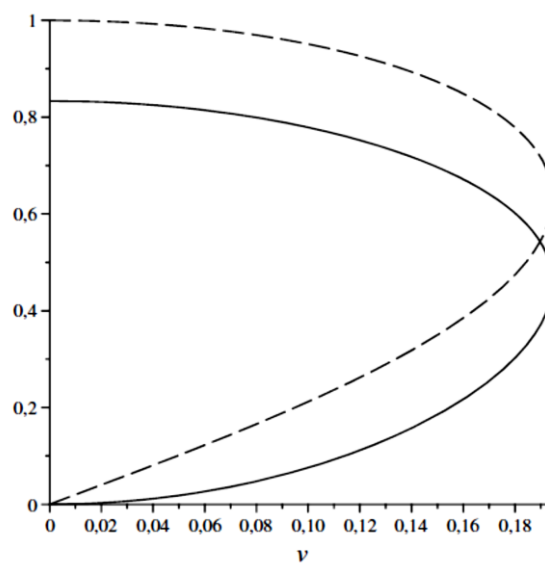


Рис. 2. Зависимость  $A(v)$  (сплошная),  $\Delta(v)$  (пунктир) / Fig. 2. Dependence  $A(v)$  (solid),  $\Delta(v)$  (dotted line)

Знак безразмерного параметра  $d_2$  влияет на полярность солитона. Для положительных значений параметра (жесткая нелинейность) солитон имеет отрицательную полярность, отрицательных (мягкая нелинейность) – положительную. Величина нелинейности не влияет на скорость распространения волн и их ширину, но влияет на их амплитуду. Чем меньше величина нелинейности, тем больше амплитуда волны, т.е. в слабонелинейных средах распространяются волны большей амплитуды.

В предельном случае, когда  $\theta^2$  близко к своей нижней границе, безразмерные коэффициенты равны  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = \frac{4\sqrt{3}Ku_0}{k}$ ,  $d_3 = 1$ , а уравнение (5) принимает вид

$$W_{\chi\chi} + b_1 W + b_2 (W^2 + W_{\chi}^2) = 0, \quad (7)$$

где  $b_1 = \frac{1-v^2}{v^2}$ ,  $b_2 = \frac{d_2}{2v^2} = \frac{2\sqrt{3}d}{v^2}$  введены для сокращения записи,  $d = \frac{Ku_0}{k}$  – характеризует упругую нелинейность.

Равенство (7) представляет собой уравнение ангармонического осциллятора с двумя квадратичными нелинейностями. Фазовый портрет уравнения при  $b_1 > 0$  и  $b_2 < 0$  представлен на рис. 3. На фазовой плоскости присутствуют два состояния равновесия: «центр», который находится в начале координат, и «седло», расположение которого (слева или справа от «центра») зависит от типа нелинейности. Как и в классическом случае ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью [41], если нелинейность соответствует «жесткой», то «седло» расположено левее «центра». При  $b_1 < 0$  фазовый портрет смещается вдоль горизонтальной оси таким образом, что в начале координат находится «седло».

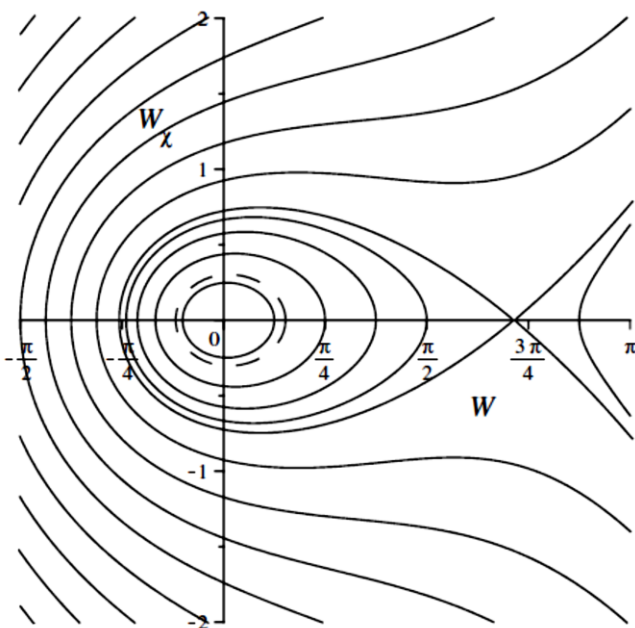


Рис. 3. Фазовый портрет  $(W, W_{\chi})$   
/ Fig. 3. Phase portrait  $(W, W_{\chi})$

В системе могут распространяться уединенные волны солитонного типа и периодические волны. Точного аналитического решения в виде солитонов для уравнения (7) не удастся найти, полюс уравнения равен нулю [40].

В случае слабой нелинейности ( $d \ll 1$ ) решение уравнения (7) находим, используя асимптотическое разложение [42]:

$$W(\chi) = A_0 \cos(\sqrt{b_1}\chi + \phi_0) + \varepsilon \frac{A_0^2 b_2}{2b_1} \left( \frac{(1-b_1)}{3} \cos 2(\sqrt{b_1}\chi + \phi_0) - (1+b_1) \right). \quad (8)$$

Амплитуда и фаза колебаний определяются выражениями

$$A_0 = \sqrt{w_1^2 + \frac{w_2^2}{b_1}} + \varepsilon \frac{b_2}{3\sqrt{b_1}} \frac{w_1(w_1^2 + 3w_2^2 + 2w_1^2 b_1)}{\sqrt{w_1^2 b_1 + w_2^2}},$$

$$\phi_0 = -\arctan\left(\frac{w_2}{\sqrt{b_1}w_1}\right) + \varepsilon \frac{b_2}{3\sqrt{b_1}} \frac{w_2(2w_2^2 + 3w_1^2 b_1 + w_2^2 b_1)}{b_1(w_1^2 b_1 + w_2^2)},$$

а  $w_1$  и  $w_2$  задаются начальными условиями  $W(0) = w_1$ ,  $W_{\chi}(0) = w_2$ .

Приближенное решение (8) вблизи устойчивого положения равновесия отмечено пунктиром на рис. 3. Найденное решение справедливо только в дозвуковом случае и мягкой нелинейности. При увеличении жесткости амплитуда волн (при фиксированных начальных условиях) падает, а период увеличивается. Чем ближе скорость нелинейной волны к скорости звука, тем меньшей амплитуды периодические волны.

## Заключение

В работе сформулированы основные принципы структурного моделирования, позволяющего вывести динамически-непротиворечивые модели градиентно-упругих сред. С привлечением метода альтернативной континуализации получено уравнение в частных производных, описывающее одномерную физически нелинейную решетку, состоящую из одинаковых масс и пружин различной жесткости. Исследованы особенности формирования в такой среде пространственно-локализованных волн деформации.

## Литература

1. *Cosserat E. et F.* Theorie des Corps Deformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. (Reprint, 2009).
2. *Кривцов А.М.* Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
3. *Material Instabilities in Solids / R. de Borst, E. van der Giessen (Eds).* Chichester; N.Y.; Wienheim; Brisbane; Singapore; Toronto: J. Wiley and Sons, 1998. 556 p.
4. *Николаевский В.Н.* Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 447 с.

5. *Vardoulakis I., Sulem J.* Bifurcation Analysis in Geomechanics. London: Blackie Academic and Professional, 1995. 459 p.
6. *Chang C.S., Ma L.* A micromechanical-based micropolar theory for deformation of granular solids // Intern. J. Solids and Structures. 1994. Vol. 28, № 1. P. 67–87.
7. *Christoffersen J., Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.A.* A micromechanical description of granular material behavior // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48, № 2. P. 339–344.
8. *Lippman H.* Cosserat plasticity and plastic spin // Applied Mechanical Review. 1995. Vol. 48, № 11, part 1. P. 753–762.
9. *Cleland A.N.* Foundations of Nanomechanics: from Solid-State Theory to Device Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2003. 440 p.
10. *Ghoniem N.M., Busso E.P., Kioussis N., Huang H.* Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview // Phil. Magazine. 2003. Vol. 83, № 31–34. P. 3475–3528.
11. *Li S., Wang G.* Introduction to Micromechanics and Nanomechanics. World Scientific Co., 2008. 516 p.
12. *Shining Zhu, Xiang Zhang.* Metamaterials: artificial materials beyond nature // National Science Review. 2018. Vol. 5, № 2. P. 131.
13. *Kolken H.M.A., Zadpoor A.A.* Auxetic mechanical metamaterials // RSC Advances. 2017. Vol. 7, № 9. P. 5111–5129.
14. *Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М.* Поглощение звука и метаматериалы (обзор) // Акуст. журн. 2018. Т. 64, № 5. С. 517–525.
15. *Гуляев Ю.В., Лагарьков А.Н., Никитов С.А.* Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применения // Вестн. РАН. 2008. Т. 78, № 5. С. 438–457.
16. *Mechanics of Generalized Continua / H. Altenbach, G.A. Maugin, V.I. Erofeev (Eds.).* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 350 p.
17. *Erofeev V.I.* Wave Processes in Solids with Microstructure. New Jersey; London; Singapore; Hong Kong; Bangalore; Taipei: World Scientific Publishing, 2003. 256 p.
18. *Вахненко В.А.* Диагностика свойств структурированной среды длинными нелинейными волнами // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 5. С. 35–42.
19. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Maugin G.A.* Nonlinear wave interactions in 1D crystals with complex lattice // Wave Motion. 1999. Vol. 29. P. 297–312.
20. *Potapov A.I., Pavlov I.S., Lisina S.A.* Acoustic identification of nanocrystalline media // J. of Sound and Vibration. 2009. Vol. 322, № 3. P. 564–580.
21. *Pavlov I.S.* Acoustic identification of the anisotropic nanocrystalline medium with non-dense packing of particles // Acoustical Physics. 2010. Vol. 56, № 6. P. 924–934.
22. *Berglund K.* Structural models of micropolar media // Mechanics of Micropolar Media / O. Brulin and R.K.T. Hsieh (Eds.). Singapore: World Scientific, 1982. P. 35–86.
23. *Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A.* A 2D Granular medium with rotating particles // Int. J. of Solids and Structures. 2006. Vol. 43, № 20. P. 6194–6207.
24. *Павлов И.С., Потанов А.И.* Структурные модели в механике нанокристаллических сред // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 3. С. 348–352.
25. *Erofeev V.I., Pavlov I.S.* Rotational waves in microstructured materials // Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures. Advanced Structured Materials / F. dell’Isola, V.A. Eremeyev, A. Vol. Porubov (Eds.). 2018. Cham: Springer, Vol. 87. P. 103–124.
26. *Vasiliev A.A., Pavlov I.S.* Structural and mathematical modeling of Cosserat lattices composed of particles of finite size and with complex connections // IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering. 2018. Vol. 447. P. 012079. DOI:10.1088/1757-899X/447/1/012079.
27. *Ляв А.Е.* Математическая теория упругости. М.: ОНТИ, 1935. 674 с.
28. *Voigt W.* Theoretische studien uber die elastizitätsverhältnisse der krystalle // Abn. Ges. Wiss. Gottingen. 1887. Vol. 34.
29. *Born M., Huang K.* Dynamical theory of crystal lattices. Int. series of monographs on physics. 1954. 431 p.
30. *Broberg K.B.* The cell model of materials // Computational Mechanics. 1997. Vol. 19. P. 447–452.
31. *Ерофеев В.И., Павлов И.С.* Структурное моделирование метаматериалов. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019. 196 с.
32. *Федоров В.И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 386 с.
33. *Ostojja-Starzewski M., Sheng P.Y., Alzabdeh K.* Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals // Computational Materials Science. 1996. Vol. 7. P. 82–93.
34. *Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R.* Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // Int. J. of Solids and Structures. 2001. Vol. 38. P. 1563–1583.
35. *Ерофеев В.И., Мальханов А.О.* Локализованные волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде, взаимодействующей с магнитным полем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2017. № 2. С. 130–138.
36. *Можен Ж.* Механика электромагнитных сплошных сред. М.: Мир, 1991. 560 с.
37. *Askes H., Metrikine A.* One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation // European J. of Mechanics A/Solids. 2002. Vol. 21, № 4. P. 573–588.

38. Metrikine A.V., Askes H. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part. 2: Static and dynamic response // *European J. of Mechanics A/Solids*. 2002. Vol. 21, № 4. P. 589–596.

39. Метрикин А.В., Прохорова Ю.М. О выводе динамически-непротиворечивой модели градиентной теории упругости методом континуализации регулярной решетки // *Мат. моделирование систем и процессов*. 2006. № 4. С. 133–141.

40. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

41. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.

42. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 409 с.

#### References

1. Cosserat E. et F. (1909). *Theorie des Corps Deformables*. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils Publ., 226 p. (Reprint, 2009).

2. Krivtsov A.M. (2007). *Deformation and destruction of microstructured solids*. Moscow, Fizmatlit Publ., 304 p. (in Russian).

3. *Material Instabilities in Solids*. (1998). Borst de R., Giessen van der E. (Eds.). Chichester, New York, Wienheim, Brisbane, Singapore, Toronto, J. Wiley and Sons Publ., 556 p.

4. Nikolaevskiy V.N. (1996). *Geomechanics and fluidodynamics*. Moscow, Nedra Publ., 447 p. (in Russian).

5. Vardoulakis I., Sulem J. (1995). *Bifurcation analysis in geomechanics*. London, Blackie Academic and Professional Publ., 459 p.

6. Chang C.S., Ma L. (1994). A micromechanical-based micropolar theory for deformation of granular solids. *Intern. J. Solids and Structures*, vol. 28, no. 1, pp. 67-87.

7. Christoffersen J., Mehrabadi M.M., Nemat-Nasser S.A. (1981). A micromechanical description of granular material behavior. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 48, no. 2, pp. 339-344.

8. Lippman H. (1995). Cosserat plasticity and plastic spin. *Applied Mechanical Review*, vol. 48, no. 11, part 1, pp. 753-762.

9. Cleland A.N. (2003). *Foundations of nanomechanics: from solid-state theory to device applications*. Berlin, Springer-Verlag Publ., 440 p.

10. Ghoniem N.M., Busso E.P., Kioussis N., Huang H. (2003). Multiscale modelling of nanomechanics and micromechanics: an overview. *Phil. Magazine.*, vol. 83, no. 31-34, pp. 3475-3528.

11. Li S., Wang G. (2008). *Introduction to micromechanics and nanomechanics*. World Scientific Publ., 516 p.

12. Shining Zhu, Xiang Zhang (2018). Metamaterials: artificial materials beyond nature. *National Science Review*, vol. 5, no. 2, p. 131.

13. Kolken H.M.A., Zadpoor A.A. (2017). Auxetic mechanical metamaterials. *RSC Advances*, vol. 7, no. 9, pp. 5111-5129.

14. Bobrovnitsky Yu.I., Tomilina T.M. (2018). Sound absorption and metamaterials: A review. *Akust. zhurn.*, vol. 64, no. 5, pp. 519-526.

15. Gulyaev Yu.V., Lagar'kov A.N., Nikitov S.A. (2008). Metamaterials: basic research and potential applications. *Vestn. RAN*, vol. 78, pp. 268-278.

16. *Mechanics of Generalized Continua*. (2011). H. Altenbach, G.A. Maugin, V.I. Erofeev (Eds.). Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 350 p.

17. Erofeev V.I. (2003). *Wave processes in solids with microstructure*. New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, Bangalore, Taipei, World Scientific Publ., 256 p.

18. Vakhnenko V.A. (1996). Diagnosis of the properties of a structured medium by long nonlinear waves. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 37, no 5, pp. 643-649.

19. Potapov A.I., Pavlov I.S., Maugin G.A. (1999). Nonlinear wave interactions in 1D crystals with complex lattice. *Wave Motion*, vol. 29, pp. 297-312.

20. Potapov A.I., Pavlov I.S., Lisina S.A. (2009). Acoustic identification of nanocrystalline media. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 322, no. 3, pp. 564-580.

21. Pavlov I.S. (2010). Acoustic identification of the anisotropic nanocrystalline medium with non-dense packing of particles. *Acoustical Physics*, vol. 56, no. 6, pp. 924-934.

22. Berglund K. (1982). Structural models of micropolar media. *Mechanics of Micropolar Media*. O. Brulin and R.K.T. Hsieh (Eds.). Singapore, World Scientific Publ., pp. 35-86.

23. Pavlov I.S., Potapov A.I., Maugin G.A. (2006). A 2D granular medium with rotating particles. *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 43, no. 20, pp. 6194-6207.

24. Pavlov I.S., Potapov A.I. (2008). Structural models in mechanics of nanocrystalline media. *Dokl. AN*, vol. 53, no. 7, pp. 408-412.

25. Erofeev V.I., Pavlov I.S. (2018). Rotational waves in microstructured materials. *Advances in Mechanics of Microstructured Media and Structures*. F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A.Vol. Porubov (Eds.). *Advanced Structured Materials*, Cham, Springer Publ., vol. 87, pp. 103-124.

26. Vasiliev A.A., Pavlov I.S. (2018). Structural and mathematical modeling of Cosserat lattices composed of particles of finite size and with complex connections. *IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering*, vol. 447, p. 012079. DOI: 10.1088/1757-899X/447/1/012079.

27. Lyav A.E. (1935). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Moscow, ONTI Publ., 674 p. (in Russian).



28. Voigt W. (1887). Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle. *Abn. Ges. Wiss. Göttingen*, vol. 34.
29. Born M., Huang K. (1954). *Dynamical theory of crystal lattices. Int. Series of monographs on physics*. 431 p.
30. Broberg K.B. (1997). The cell model of materials. *Computational Mechanics*, vol. 19, pp. 447-452.
31. Erofeev V.I., Pavlov I.S. (2019). *Structural modeling of metamaterials*. Nizhny Novgorod, Institute of Applied Physics Press, RAS, 196 p. (in Russian).
32. Fedorov V.I. (1965). *Theory of elastic waves in crystals*. Moscow, Nauka Publ., 386 p.
33. Ostoja-Starzewski M., Sheng P.Y., Alzebdeh K. (1996). Spring network models in elasticity and fracture of composites and polycrystals. *Computational Materials Science*, vol. 7, pp. 82-93.
34. Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. (2001). Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 1563-1583.
35. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O. (2017). Localized strain waves in a nonlinearly elastic conducting medium interacting with a magnetic field. *Mechanics of Solids*, vol. 52, no. 2, pp. 224-231.
36. Mozhen Zh. (1991). *Mechanics of electromagnetic continuums*. Moscow, Mir Publ., 560 p. (in Russian).
37. Askes H., Metrikine A.Vol. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 573-588.
38. Metrikine A.V., Prokhorova Yu.M. (2006). On the derivation of a dynamically consistent model of the gradient theory of elasticity by the regular lattice continualization. *Matematicheskoe modelirovanie system i protsessov*, no. 14, pp. 133-141. (in Russian).
39. Metrikin A.V., Askes H. (2002). One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 2: Static and dynamic response. *European Journal of Mechanics A/Solids*, vol. 21, no. 4, pp. 589-596.40. Kudryashov N.A. (2010). *Methods of nonlinear mathematical physics*. Dolgoprudny, Intellect Publ., 368 p. (in Russian).
41. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. (2002). *Waves in the rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity*. Moscow, Fizmatlit Publ., 208 p. (in Russian).
42. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Yu.A. (1958). *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 409 p. (in Russian).

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-48-52

## К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ЗАКОНАХ СВЯЗИ ОБЩЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2020 г. В.Г. Зубчанинов<sup>1</sup><sup>1</sup>Тверской государственной технической университет, Тверь, Россия

## TO THE QUESTION OF DETERMINING LAWS OF COMMUNICATION GENERAL MATHEMATICAL THEORY OF PLASTICITY

V.G. Zubchaninov<sup>1</sup><sup>1</sup>Tver State Technical University, Tver, Russia

Зубчанинов Владимир Георгиевич – доктор технических наук, профессор, кафедра сопротивления материалов, теории упругости и пластичности, Тверской государственной технической университет, наб. Афанасия Никитина, 22, г. Тверь, 170026, Россия, e-mail: vlgzub@gmail.com

Vladimir G. Zubchaninov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Materials Resistance, Theory of Elasticity and Plasticity, Tver State Technical University, Afanasiya Nikitina Emb., 22, Tver, 170026, Russia, e-mail: vlgzub@gmail.com

Обсуждается вопрос о достоверности и пределах применимости общих законов математической теории пластичности. В новом направлении теории пластичности, теории процессов упругопластического деформирования, приводится постулат изотропии, устанавливающий инвариантность связи между напряжениями и деформациями. Однако эта инвариантность при ортогональных преобразованиях образа процесса и его векторов в линейном координатном пространстве может быть нарушена в связи с изменением инвариантов вида напряженно-деформированного состояния. Однако многочисленные опыты показывают, что влияние этих инвариантов является слабым и им можно пренебречь.

В теории течения основной гипотезой является предположение о разложении полных деформаций на упругие и пластические части. Такое разложение при сложном нагружении невозможно и противоречит понятию о полном и неполном пластическом состоянии материала. В работе показано, что теория течения является частным случаем теории процессов. Получен расширенный вариант теории течения, который может быть использован для траекторий деформирования средней кривизны, позволяющий использовать в теории течения гипотезу о разложении полных деформаций.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, постулат изотропии, процессы деформирования, инварианты, напряженно-деформированное состояние, определяющие соотношения, сложное нагружение.

The paper discusses the question of the reliability and applicability of the general laws of the mathematical theory of plasticity. In a new direction of the theory of plasticity (the theory of elastic-plastic deformation processes) the isotropy postulate is given, which establishes the invariance of the connection between stresses and strains. However, this invariance during orthogonal transformations of the image of the process and its vectors in the linear coordinate space can be violated due to a change in the invariants of the form of the stress-strain state. However, numerous experiments show that the influence of these invariants is weak and can be neglected.

In the theory of flow, the main hypothesis is the assumption of the decomposition of total deformations into elastic and plastic parts. Such decomposition under complex loading is impossible and contradicts the concept of the complete and incomplete plastic states of the material. This article shows that the flow theory is a special case of the theory of processes. An extended version of the theory of flow is obtained, which can be used for medium-curvature deformation trajectories, and which makes it possible to use the hypothesis of decomposition of total deformations in the theory of flow.

**Keywords:** elasticity, plasticity, isotropy postulate, deformation processes, invariants, stress-strain state, defining relations, complex loading.

### Тензоры напряжений, деформаций и их инварианты

Напряженно-деформированное состояние (НДС) в точке тела, отнесенного к декартовой системе координат  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , в физическом пространстве известно, если заданы компоненты  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  тензоров напряжений ( $\sigma_{ij}$ ) и деформаций ( $\varepsilon_{ij}$ ) как непрерывные функции координат этих точек  $x_i$  и времени  $t$ . Геометрически тензоры

( $\sigma_{ij}$ ) и ( $\varepsilon_{ij}$ ) в данных точках могут быть представлены в виде тривекторов

$\mathbf{S}_i = \sigma_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j$ ,  $\mathbf{E}_i = \varepsilon_{ji} \hat{\mathbf{e}}_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , на трех взаимно ортогональных площадках, где  $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$  – ортонормированный координатный репер.

Вектор напряжений  $\mathbf{S}_n$  в той же точке на площадке с нормалью  $\hat{\mathbf{n}} = n_i \hat{\mathbf{e}}_i$  представляется формулой Коши

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_i n_i = X_i \hat{\mathbf{e}}_i, \quad X_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (1)$$

При ортогональном преобразовании координатного репера с помощью матрицы  $l_{ij}$  имеем

$$\hat{\mathbf{e}}'_i = l_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j, \quad X'_i = l_{ij} X_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

При неизменном векторе  $\mathbf{S}_n$  и тензоре напряжений в целом длина вектора  $\mathbf{S}_n$  сохраняется. Поэтому  $X'_i X'_i = (l_{ij} X_j)(l_{ik} X_k) = X_j \delta_{jk} X_k$ , откуда

$$l_{ij} l_{ik} = \delta_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Соотношение (2) показывает, что при ортогональном преобразовании координатного репера он остается ортонормированным. Направление вектора  $\mathbf{S}_n$ , при котором он совпадает с направлением нормали  $\hat{\mathbf{n}}$ , называют собственным направлением, а сам вектор  $\mathbf{S}_n = \sigma_n$  – собственным или главным вектором напряжений. В этом случае

$$\mathbf{S}_n = \sigma_n \hat{\mathbf{n}} = \sigma_n \delta_{ij} n_j \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (3)$$

$$\text{Сравнивая (3) и (1), получим систему уравнений } (\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}) n_j = 0, \quad n_i n_i = 1, \quad (4)$$

для которой определитель  $|\sigma_{ij} - \sigma_n \delta_{ij}| = 0$ .

Раскрывая его, получаем характеристическое уравнение

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0, \quad (5)$$

где коэффициенты – инварианты

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0, \\ I_2 = \sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij} = 9\sigma_0^2 - S^2, \\ I_3 = |\sigma_{ij}| = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{cases}$$

$$\text{Здесь } \sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$S = \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$  – среднее нормальное напряжение и модуль тензора напряжений соответственно.

Для девиаторов напряжений ( $S_{ij}$ ) и деформаций ( $\varepsilon_{ij}$ ) их компоненты определяются формулами  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$ .

Инварианты девиатора напряжений

$$\begin{cases} J_1 = S_{ii} = S_{11} + S_{22} + S_{33} = 0, \\ J_2 = S_{ij} S_{ij} = \sigma^2, \\ J_3 = |S_{ij}| = \frac{\sigma^3 \cos 3\varphi}{3\sqrt{6}}, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}$$

– модуль девиатора;  $\varphi$  – угол вида напряженного состояния формоизменения. Аналогичные соотношения имеют место и для тензора деформаций.

Решение кубического уравнения (4) для собственных значений напряжений имеет вид

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \varphi, \\ \sigma_2 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \varphi \right), \\ \sigma_3 = \sigma_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \cos \left( \frac{2\pi}{3} + \varphi \right). \end{cases}$$

Критерии пластичности Мизеса – Надаи

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \sigma^T = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_T, \end{aligned}$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести при растяжении.

Если в точке тела реализуются процессы деформирования и нагружения, то компоненты тензоров (тривекторов) и вектора  $\mathbf{S}_n$  изменяются. Вектор  $\mathbf{S}_n$  изменяет свое направление и модуль. В этом случае все три инварианта НДС изменяются. При простом нагружении все компоненты тензоров изменяются пропорционально одному параметру, например времени  $t$ . В этом случае направляющие тензоры удовлетворяют равенствам

$$\frac{S_{ij}}{\sigma} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon}, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \varepsilon_{ij}, \quad (6)$$

где  $\sigma = \Phi(\varepsilon) = 2G_p \varepsilon$  является универсальным законом (единой кривой упрочнения материала);  $G_p$  – пластический модуль сдвига.

Параметры вида НДС:  $\cos 3\varphi = \cos 3\psi$ ,  $\varphi = \psi$ , а третьи инварианты вида формоизменения  $J_3 = |S_{ij}| = \frac{\sigma^3 \cos 3\varphi}{3\sqrt{6}}$ ,  $J_3^\varepsilon = |\varepsilon_{ij}| = \frac{\varepsilon^3 \cos 3\psi}{3\sqrt{6}}$  пропорциональны  $J_3^\sigma = (2G_p)^3 J_3^\varepsilon$ .

Это означает инвариантность закона (6) при ортогональном преобразовании тривектора.

А.А. Ильюшин [1] при сложном нагружении предложил принять закон связи напряжений и деформаций в тензорном виде

$$\begin{cases} S_{ij} = \sum_{n=0}^4 A_n \frac{d^n \varepsilon_{ij}}{ds^n}, i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \end{cases} \quad (7)$$

где  $K$  – объёмный модуль. В этом случае при ортогональном преобразовании координат и координатного репера  $\{\hat{e}_i\}$  сохраняются все три инварианта тензоров, от которых зависят коэффициенты  $A_n$ . Однако при фиксированной координатной системе, но ортогональном преобразовании три-векторов и  $S_n$  уравнение (7), вообще говоря, изменяется, что означает некоторую проблему в теории пластичности.

### Векторы напряжений и деформаций в линейном координатном шестимерном $E_6$ пространстве

А.А. Ильюшин [1] для наглядного геометрического отображения векторных свойств материалов в процессах деформирования и нагружения предложил представить тензоры  $(\sigma_{ij})$ ,  $(\varepsilon_{ij})$  в виде векторов напряжений  $S$  и деформаций  $E$ :

$S = X_i \hat{e}_i$ ,  $E = Y_i \hat{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , где  $\{\hat{e}_i\}$  – ортонормированный координатный репер,

$$\begin{cases} X_1 = \sigma_{11}, & X_2 = \sigma_{22}, & X_3 = \sigma_{33}, \\ X_4 = \sqrt{2}\sigma_{12}, & X_5 = \sqrt{2}\sigma_{23}, & X_6 = \sqrt{2}\sigma_{13}, \\ Y_1 = \varepsilon_{11}, & Y_2 = \varepsilon_{22}, & Y_3 = \varepsilon_{33}, \\ Y_4 = \sqrt{2}\varepsilon_{12}, & Y_5 = \sqrt{2}\varepsilon_{23}, & Y_6 = \sqrt{2}\varepsilon_{13}. \end{cases} \quad (8)$$

Условием тождественности было принято равенство модулей тензоров и векторов

$$X_i X_i = \sigma_{ij} \sigma_{ij} = S^2, \quad Y_i Y_i = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} = E^2.$$

При ортогональном преобразовании координатного репера с матрицей  $A(\alpha_{ij})$  длины векторов  $S$  и  $E$  сохраняются. Поэтому  $X'_i = \alpha_{ij} X_j$ ,  $X'_i X'_i = X_j X_j$ , или  $X'_i X'_i = (\alpha_{ij} X_j)(\alpha_{ik} X_k) = X_j \delta_{jk} X_k$ , откуда следует соотношение

$$\alpha_{ij} \alpha_{ik} = \delta_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 6. \quad (9)$$

Соотношение (9) показывает, что при преобразовании сохраняются ортонормированность координатного репера и длина (второй инвариант) вектора.

Для полной физической тождественности тензоров и векторов в  $E_6$  необходимо отметить, что в  $E_6$ , как и в физическом пространстве, не может быть более трех собственных значений напряжений и деформаций [2, 3]. Сам А.А. Ильюшин утверждал, что все три инварианта в физическом пространстве остаются инвариантами и в линейном координатном пространстве  $E_6$  при ортогональном преобразовании векторов и тензоров. Поэтому в  $E_6$  вместо определяющих соотношений (4), (5) в фи-

зическом пространстве получаем соотношения в форме [4]

$$\begin{aligned} -|\alpha_{ij} - \lambda \delta_{ij}| &= 0, \\ \lambda^6 - M_1 \lambda^5 + M_2 \lambda^4 - M_3 \lambda^3 + M_4 \lambda^2 - M_5 \lambda + M_6 &= 0. \end{aligned}$$

Данное характеристическое уравнение определяет собственные значения. В общем случае тензоров второго порядка действительных собственных значений может быть не более шести. Коэффициенты  $M_n$ ,  $n = 1, 2, 3$ , содержат главные миноры матрицы  $A(\alpha_{ij})$  ортогонального преобразования. Однако из физических соображений тождественности векторов и тензоров напряжений и деформаций ясно, что их может быть не более трех в  $E_6$ . Это значит, что три инварианта тензоров в физическом пространстве остаются инвариантами векторов и в линейном пространстве  $E_6$  [2]. При ортогональном преобразовании векторов  $S$  и  $\mathcal{E}$  с помощью матрицы  $\mathbf{V}(\beta_{ij})$  при неизменном координатном репере  $\{\hat{e}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , имеем

$$\begin{aligned} X'_i &= \beta_{ij} X_j, \quad X'_i X'_i = X_j X_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \\ X'_i X'_i &= (\beta_{ij} X_j)(\beta_{ik} X_k) = X_j \delta_{jk} X_k, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned}$$

откуда получаем соотношение

$$\beta_{ij} \beta_{ik} = \delta_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 6. \quad (10)$$

Сравнивая (8)–(10), видим, что  $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ , т.е. матрицы преобразования координатного репера и вектора совпадают. Однако во втором случае преобразования вектора напряжений совпадают только модули вектора и тензора. Первый и третий инварианты тензоров и вектора изменяются. Аналогично для вектора деформации. А.А. Ильюшин в совмещенном пространстве  $E_6$  ввел понятие образа процесса деформирования, под которым понимаются траектория деформирования, описываемая концом вектора  $E$  в  $E_6$  (либо  $\mathcal{E}$  в  $E_5$ ), и построенные в каждой ее точке векторы напряжений  $S$  (либо  $\sigma$  в  $E_5$ ), а также приписанные к ним скалярные параметры (температура  $T$ , давление  $P$  и др.). В каждой точке траектории строится также подвижный линейно независимый ортонормированный репер Френе – Ильюшина  $\{\hat{p}_k\}$ , орты которого удовлетворяют рекуррентным формулам [2, 5, 6]

$$\frac{d\hat{p}_k}{ds} = -\kappa_{k-1} \hat{p}_{k-1} + \kappa_k \hat{p}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \text{ откуда}$$

$$\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{d\mathcal{E}}{ds}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2 \mathcal{E}}{ds^2}, \\ \kappa_2 \hat{p}_3 &= \kappa_1 \frac{d\mathcal{E}}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\kappa_1} \frac{d^2 \mathcal{E}}{ds^2} \right) \dots \end{aligned}$$

Разлагая векторы  $\sigma$ ,  $d\sigma/ds$  в этом репере, получаем определяющие уравнения связи напряжений и

деформаций. Удобнее это сделать в девиаторном подпространстве  $E_5$ . Учитывая упругий закон Гука для объемной деформации, получаем

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad \sigma = P_k \hat{p}_k,$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = P_k^* \hat{p}_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (11)$$

Соотношения (11) выражают собой постулат изотропии для начально изотропных сред: *соотношения (11) связи между напряжениями и деформациями и их образ процесса инвариантны относительно ортогональных преобразований вращения и отражения в  $E_6$  и  $E_5$* . Постулат определяет векторные свойства материалов, а коэффициенты в (11) зависят от инвариантов НДС. Однако при ортогональном преобразовании образа процесса как жесткого целого может измениться НДС. Это означает, что соотношения (11) могут потерять свою инвариантность при реализации сложных процессов деформирования и нагружения.

Между тем экспериментальные исследования многочисленных конструкционных материалов по проверке постулата изотропии показали, что влияние изменения вида НДС и их инвариантов при ортогональных преобразованиях является слабым и им можно пренебречь.

### Гипотеза компланарности в теории пластичности

Гипотеза компланарности предполагает, что три вектора  $\sigma$ ,  $d\sigma$ ,  $d\mathcal{E}$  всегда лежат в одной соприкасающейся плоскости подвижного репера Френе – Ильюшина координатного пространства. Представим вектор формоизменения [6] в  $E_6$

$$\sigma = \sigma \hat{\sigma} = \sigma (\cos \vartheta_1 \hat{p}_1 + \sin \vartheta_1 \hat{p}_2), \quad (12)$$

где  $\hat{\sigma}$  – единичный вектор напряжений;  $\vartheta_1$  – угол сближения;  $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1$ . Дифференцируя (12) по длине дуги траектории деформирования  $s(t)$ , получим

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} \hat{\sigma} + \sigma \frac{d\hat{\sigma}}{ds}, \quad (13)$$

где  $\frac{d\hat{\sigma}}{ds} = \frac{d\hat{p}_1}{ds} \cos \vartheta_1 + \frac{d\hat{p}_2}{ds} \sin \vartheta_1 + (-\hat{p}_1 \sin \vartheta_1 + \hat{p}_2 \cos \vartheta_1) \frac{d\vartheta_1}{ds}$ .

$$\frac{d\hat{p}_1}{ds} = \kappa_1 \hat{p}_2, \quad \frac{d\hat{p}_2}{ds} = -\kappa_1 \hat{p}_1, \quad \kappa_2 = 0, \quad (14)$$

$$\hat{p}_2 = \frac{1}{\sin \vartheta_1} [\hat{\sigma} - \hat{p}_1 \cos \vartheta_1]. \quad (15)$$

Учитывая (14), (15), из (13) получаем систему общих уравнений для плоских траекторий теории процессов

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{ds} = M_1 \hat{p}_1 + \left( \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1, \end{cases} \quad (16)$$

где  $M_1(s, \kappa_1)$ ,  $\sigma = \Phi(s, \kappa_1)$  – функционалы процесса деформирования.

Первое выражение из (16) можно представить также в виде

$$\hat{p}_1 = \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{1}{M_1} \frac{d\sigma}{ds} + \left( \cos \vartheta_1 - \frac{1}{M_1} \frac{d\sigma}{ds} \right) \hat{\sigma}.$$

Теория пластического течения является частным вариантом теории упругопластических процессов. Основная гипотеза теории течения – предположение о возможности разложения полных деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и  $\mathcal{E}_{ij}$  на их упругие  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\mathcal{E}_{ij}^e$  и пластические  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\mathcal{E}_{ij}^p$  части, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}^e + \mathcal{E}_{ij}^p. \quad (17)$$

Полагая в уравнениях (16)  $M_1 = 2G$ , где  $G$  – упругий модуль сдвига, получим

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{ds} + \left( \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{ds} \right) \hat{\sigma}, \\ \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{2G}{\sigma} \sin \vartheta_1. \end{cases} \quad (18)$$

В соответствии с (17)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}^e}{ds} &= \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{ds}, \quad \frac{d\mathcal{E}^p}{ds} = \frac{d\mathcal{E}}{ds} - \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{ds} = \\ &= \left( \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2G} \frac{d\sigma}{ds} \right) \hat{\sigma}. \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) – новые в общей теории пластичности. Они следуют как частный вариант из теории процессов упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении для траекторий деформирования малой и средней кривизны.

Новые уравнения теории течения содержат параметры сложного нагружения  $(s, \kappa_1)$ , а также угол сближения  $\vartheta_1$ , характеризующий векторные свойства материалов.

При свободном пластическом течении  $\hat{\sigma} = \hat{p}_1$ ,

т.е.  $\cos \vartheta_1 = \hat{\sigma} \cdot \hat{p}_1 = 1$ , получаем  $\frac{d\mathcal{E}}{ds} = \frac{\sigma}{\sigma}$ , или

$$\sigma = \sigma \frac{d\mathcal{E}}{ds}.$$

Отметим, что гипотеза о разложении полных деформаций на упругие и пластические при сложном нагружении неприемлема и является проблемной для траекторий большой кривизны.

### Заключение

Автор данной статьи в период 1949–1954 гг. учился на физико-математическом факультете по специальности «механика» в Ростовском государственном университете (РГУ). В это же время мо-

лодой доцент И.И. Ворович вместе с такими же молодыми доцентами Н.Н. Моисеевым и Л.А. Толоконниковым начали свою научно-педагогическую деятельность на этом же факультете РГУ, приехав из Москвы.

В дальнейшей научно-педагогической деятельности И.И. Ворович был избран академиком РАН, возглавил кафедру теории упругости и стал директором Научно-исследовательского института математики и механики при РГУ. Н.Н. Моисеев был избран академиком АН СССР и РАН и возглавил Вычислительный центр АН СССР. Л.А. Толоконников стал заслуженным деятелем науки и техники и был награжден орденом Ленина за успешную научно-педагогическую деятельность. Таковы были наши учителя на физмате РГУ.

Эта замечательная тройка молодых талантливых ученых-механиков положила начало развитию современной механики в РГУ. Впоследствии возникла известная в стране Ростовская научная школа механики деформируемого твердого тела под руководством академика РАН И.И. Воровича.

Иосиф Израилевич Ворович является выдающимся ученым-механиком России. Его научные работы представляют выдающийся вклад в развитие механики и математики в России и СССР.

Мы, студенты 1954 г. выпуска, ученики И.И. Воровича, всегда уважали и любили его за человечность, глубокие профессиональные знания и педагогическое мастерство, за те фундаментальные знания, которые он нам передал.

Помним! Благодарим! Уважаем!

## Литература

1. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 310 с.
2. *Ильюшин А.А.* Труды (1946–1966). Т. 2: Пластичность. М.: Физматлит, 480 с.
3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Общая математическая теория. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
4. *Зубчанинов В.Г.* Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестн. Московского ун-та. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29–45.
5. *Зубчанинов В.Г.* Устойчивость и пластичность. Т. 2: Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 336 с.
6. *Зубчанинов В.Г.* Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

## References

1. Ilyushin A.A. (1990). *Mechanics of a continuous medium*. Moscow, Moscow State University Press, 310 p. (in Russian).
2. Ilyushin A.A. (1946-1966). *Works. Vol. 2: Plasticity*. Moscow, Fizmatlit Publ., 480 p. (in Russian).
3. Ilyushin A.A. (1963). *Plasticity. General mathematical theory*. Moscow, USSR Academy of Sciences Press, 272 p. (in Russian).
4. Zubchaninov V.G. (2018). General mathematical theory of plasticity and the postulate of macroscopic definiteness and isotropy of A. A. Ilyushin. *Vestn. Moskovskogo un-ta. Matematika. Mekhanika*, no. 5, pp. 29-45. (in Russian).
5. Zubchaninov V.G. (2008). *Stability and plasticity. Vol. 2: Plasticity*. Moscow, Fizmatlit Publ., 336 p. (in Russian).
6. Zubchaninov V.G. (2008). *Mechanics of plastic media processes*. Moscow, Fizmatlit Publ., 352 p. (in Russian).

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-53-60

## РАСТЯЖЕНИЕ И РАЗДУВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО НЕОДНОРОДНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

© 2020 г. М.И. Карякин<sup>1,2</sup>, Л.П. Обрезков<sup>3</sup><sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия,<sup>2</sup>Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Россия<sup>3</sup>ЛТУ-Университет, Лappeenranta, Финляндия

## STRETCHING AND INFLATING THE NONLINEAR ELASTIC INHOMOGENEOUS HOLLOW CYLINDER

M.I. Karyakin<sup>1,2</sup>, L.P. Obrezkov<sup>3</sup><sup>1</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia,<sup>2</sup>Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz, Scientific Centre, Russian Academy of Science, Vladikavkaz, Russia<sup>3</sup>LUT University, Lappeenranta, Finland

Карякин Михаил Игоревич – доктор физико-математических наук, доцент, кафедра теории упругости, директор Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Южный федеральный университет, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов н/Д, 344090, Россия; старший научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, РСО-Алания, 362027, Россия, e-mail: karyakin@sfedu.ru

Mikhail I. Karyakin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Theory of Elasticity, Director of Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Milchakova St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Senior Researcher, Department of Differential Equations, Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Marcusa St., 22, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, 362027, Russia, e-mail: karyakin@sfedu.ru

Обрезков Леонид Павлович – научный сотрудник, ЛТУ-Университет, Юлиопистонкату, 34, Лappeenranta, 53850, Финляндия, e-mail: Leonid.Obrezkov@lut.fi

Leonid P. Obrezkov - Researcher, LUT University, Yliopistonkatu 34, 53850, Lappeenranta, Finland, e-mail: Leonid.Obrezkov@lut.fi

Исследовано влияние неоднородности материальных свойств на процесс трехмерной потери устойчивости полого цилиндра, растягиваемого осевой силой и нагруженного по внешней или внутренней боковой поверхности равномерным давлением. Для описания механических свойств материала цилиндра использованы две общеупотребительные модели нелинейно-упругого поведения сжимаемых материалов – трехконстантная модель Блейтца и Ко и пятиконстантная Мурнагана. Посредством полубратного метода трехмерная задача о равновесии цилиндра сведена к исследованию нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Анализ устойчивости проводился на основе линеаризации уравнений равновесия в окрестности построенного решения. Деформационные характеристики, при которых существовали нетривиальные решения однородной краевой задачи для получаемых в процессе линеаризации уравнений нейтрального равновесия, отождествлялись с критическими значениями параметров нагружения, т.е. значениями, при которых система теряет устойчивость. В качестве таких параметров использовались, в частности, коэффициенты растяжения радиального расширения цилиндра, а также безразмерная характеристика приложенного давления. На плоскости параметров нагружения определены области устойчивости. Проанализировано влияние неоднородности на размер и форму этих областей.

**Ключевые слова:** растяжение, неоднородность, устойчивость, потеря устойчивости, полубратный метод, бифуркация, большие деформации.

The influence of the inhomogeneity of material properties on the process of three-dimensional stability loss of a hollow cylinder stretched by axial force and loaded by uniform pressure on the outer or inner side surface is investigated. We used two standard models describing the compressible nonlinearly elastic material's mechanical properties, namely the three-constant Blatz and Ko model, as well as the five-constant Murnaghan model. Usage of the semi-inverse method allows the reduction of a three-dimensional cylinder equilibrium problem to the study of a nonlinear boundary-value problem for an ordinary second-order differential equation. Stability analysis was carried out based on the linearization of the equilibrium

equations in the vicinity of the constructed solution. The value of a deformation characteristic for which there were nontrivial solutions of a homogeneous boundary-value problem for the equations of neutral equilibrium obtained in the linearization process was identified with the critical value of the loading parameter, i.e., the value at which the system loses stability. The coefficients of the cylinder's stretching or radial expansion and the dimensionless characteristic of the applied pressure served as such parameters. On the plane of the loading parameters, stability regions are determined. The influence of heterogeneity on the size and shape of these regions is analyzed.

**Keywords:** stretching, heterogeneity, stability, buckling, semi-inverse method, bifurcation, finite strains.

## Введение

Конструкции в форме цилиндрических оболочек используются практически во всех областях и сферах современной промышленности: в судостроении, самолетостроении, гидротехнике, при возведении промышленных и гражданских объектов, дорожном и подземном строительстве. В большинстве случаев для их расчетов достаточно двумерных теорий, однако в ряде задач существенно важен учет толщины. Интерес представляет исследование поведения толстостенного полого цилиндра как трехмерного тела. Впервые задача упругой деформации такого объекта (полого однородного цилиндра) под действием внутреннего и внешнего давления в рамках линейной теории упругости была решена Г. Ляме еще в 1831 г. Анализ устойчивости цилиндрических конструкций в рамках трехмерной теории уделяется большое внимание с начала XX в. [1]. При этом в большинстве случаев рассматривается деформация при сжимающих напряжениях, хотя потеря устойчивости может возникать и при растягивающих. В этих случаях потеря устойчивости имеет ряд характерных особенностей. Она наступает при больших деформациях, что требует учета как геометрической, так и физической нелинейности в уравнениях теории упругости. Кроме того, она возможна не для всех моделей материалов. Так например, цилиндры из материала Киргхофа – Сен-Венана устойчивы при любых растягивающих напряжениях вдоль радиальной и осевой координаты, а состояние одноосного растяжения – для материала Муни [2].

В большинстве работ анализ устойчивости выполнялся в предположении об однородности материала. Однако однородные конструкции не всегда являются оптимальным решением инженерных задач, особенно в экстремальных условиях [3], например при большом давлении или при взаимодействии с агрессивной коррозионной средой. В таких случаях предпочтение отдается, как правило, неоднородным многослойным объектам. Двухслойные и трехслойные цилиндры часто используются в трубопроводах, газоотводящих трактах и дымовых, вентиляционных трубах и т.д. Поэтому проблема устойчивости многослойных конструк-

ций имеет важное значение с практической точки зрения. Существенную роль при этом может играть и учет возможной неоднородности конструкций, поскольку микроструктура материала может существенно влиять на прочностные характеристики трехмерного объекта [4].

В этой работе будет рассмотрен ряд задач устойчивости неоднородных полых цилиндров из сжимаемых материалов при раздувании и растяжении для трех различных типов неоднородности материала.

## Равновесие и устойчивость цилиндра с переменным модулем сдвига

Рассмотрим цилиндр, материальные свойства которого описываются моделью материала Блейтца и Ко [5]. Функция удельной потенциальной энергии определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} \mu (1 - \beta) \left[ I_2 I_3^{-1} + \frac{1}{\alpha} (I_3^\alpha - 1) - 3 \right] + \frac{1}{2} \mu \beta \left[ I_1 + \frac{1}{\alpha} (I_3^{-\alpha} - 1) - 3 \right]. \quad (1)$$

При малых деформациях параметр  $\mu$  имеет смысл модуля сдвига, параметр  $\alpha$  связан с коэффициентом Пуассона  $\nu$  выражением  $\alpha = \frac{\nu}{(1-2\nu)}$ .

Материальный параметр  $\beta \in [0, 1]$  является чисто нелинейным: он характеризует жесткость материала при сверхбольших деформациях [6]. Величины  $I_k$  представляют собой главные инварианты меры деформации Коши  $\mathbf{G}$ , связанной с градиентом деформации  $\mathbf{C}$  соотношением  $\mathbf{G} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T$ .

Упрощенный вариант этой модели получается, если положить  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 0$ . Тогда выражение (1) запишется в виде

$$W = \frac{1}{2} \mu \left[ I_2 I_3^{-1} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right]. \quad (2)$$

Будем считать, что материальный параметр  $\mu$  является переменным, причем зависит только от



радиальной координаты  $r$  в отсчетной конфигурации  $\mu = \mu(r)$ .

Опишем деформацию осевого растяжения полового кругового цилиндра высотой  $h$  с внутренним и внешним радиусами  $r_0$  и  $r_1$  полуобратным представлением вида

$$R = P(r), \Phi = \varphi, Z = \eta z, \quad (3)$$

где  $r, \varphi, z$  и  $R, \Phi, Z$  – цилиндрические координаты в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно;  $r_0 \leq r \leq r_1, 0 \leq z \leq h, \eta$  – коэффициент удлинения цилиндра;  $\eta < 1$  соответствует сжатию цилиндра,  $\eta > 1$  – его растяжению. Функция  $P(r)$  описывает радиус точки цилиндра в деформированном состоянии.

Для описания напряженного состояния цилиндра будем использовать тензор напряжений Пиолы  $\mathbf{D}$ , определяющее соотношение для которого имеет вид

$$\mathbf{D} = 2 \frac{dW}{d\mathbf{G}} \cdot \mathbf{C}. \quad (4)$$

Тогда уравнения равновесия нелинейно-упругого тела можно записать в отсчетной (недеформированной) конфигурации

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (5)$$

Полуобратное представление (3) с учетом (4) позволяет свести уравнения (5) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции  $P(r)$ , принимающему для модели (2) с переменным модулем сдвига вид

$$P'' = - \frac{P'(-\mu'rP^3 + P'^3P^4\eta\mu' - \mu P^3 + P'^3r^3\mu)}{3\mu r P^3}, \quad (6)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной  $r$ .

В качестве граничных условий для уравнения (6) выберем условие загруженности внутренней поверхности цилиндра равномерно распределенным давлением  $p$  и свободной от напряжений внешней боковой поверхности. В результате получаем

$$\frac{\mu(r_1 - P(r_1))'^3 P(r_1)\eta}{r_1 P'(r_1)^3} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\mu(r_0 - P'(r_0)^3 P(r_0)\eta)}{r_0 P(r_0)^3} = \frac{p P(r_0)\eta}{r_0}.$$

Краевая задача (6), (7) решалась численно. Для ускорения вычислений при построении диаграммы нагружения, т.е. зависимости радиуса деформиро-

ванного цилиндра от приложенного давления, использовался прием замены краевой задачи задачей Коши вида

$$P(r_1) = r_1 + \Delta, \quad (8)$$

$$P'(r_1) = \frac{(rP^2\eta^2)^{\frac{1}{3}}}{P\eta},$$

где параметр  $\Delta$  представляет собой изменение внешнего радиуса цилиндра после деформации. Величину соответствующей ему нагрузки  $p$  можно найти после решения задачи Коши (6), (8) из второго условия в (7).

Диаграмма нагружения на плоскости параметров  $p$  и  $\xi_1 = P(r_1)/r_1$  при раздувании внутренним давлением для материала (2) для однородного цилиндра и всех рассмотренных типов неоднородности является немонотонной: она содержит точку максимума, за которой следует падающий участок. Его наличие свидетельствует о неустойчивости процесса нагружения.

Исследование устойчивости проведем на основе бифуркационного подхода методом линеаризации. Для этого модифицируем исходное полуобратное соотношение следующим образом:

$$\begin{cases} R = P(r) + \varepsilon u(r, \varphi, z), \\ \Phi = \varphi + \varepsilon v(r, \varphi, z), \\ Z = \eta z + \varepsilon w(r, \varphi, z). \end{cases} \quad (9)$$

Вычисляя соответствующие (9) геометрические характеристики (градиент деформации, мера деформации Коши, ее инварианты и т. д.) и последовательно их линеаризуя (т.е. удерживая только первые степени параметра  $\varepsilon$ ), получаем уравнения нейтрального равновесия – линеаризованный вариант уравнений равновесия (5). Для их исследования использовался метод разделения переменных:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, z) &= U(r) \cos(n\varphi) \cos\left(\frac{zm\pi}{h}\right), \\ v(r, \varphi, z) &= V(r) \sin(n\varphi) \cos\left(\frac{zm\pi}{h}\right), \\ w(r, \varphi, z) &= W(r) \cos(n\varphi) \sin\left(\frac{zm\pi}{h}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

В (10)  $m$  и  $n$  – натуральные числа, называемые номерами мод потери устойчивости. При таком разделении автоматически выполняются граничные условия на торцах цилиндра, соответствующие так называемому жесткому нагружающему устройству с отсутствием трения [7], когда зафиксировано вертикальное смещение, а предметом анализа становится линейная однородная система обыкновенных

дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций  $U(r)$ ,  $V(r)$  и  $W(r)$

$$\begin{aligned}
 U'' &= -\frac{P'V'n}{3} - \frac{P'^3W'a}{3\eta^3} + \frac{r^2P'^4U}{P^4} - \frac{P'W'a}{3\eta} + \\
 &+ \frac{U'}{3r} - \frac{4r^2UP'^3}{3P^3} + \frac{P'^2Ua^2}{3\eta^2} + \frac{P'^2Un^2}{3P^2} - \\
 &- \frac{r^2P'^3V'n}{3P^2} + \frac{2r^2P'^4Vn}{3P^3} - \frac{PP'^4\mu'Wa}{3\mu} - \\
 &- \frac{3P^2}{\eta PP'^4\mu'Vn} + \frac{3P^3}{\eta P'^4\mu'U} - \frac{3\mu r}{\mu'U'} - \frac{4P\eta UP'^3\mu'}{3\mu r}, \\
 V'' &= \frac{P'^2Un}{P^3} + \frac{P'U'n}{P^2} + \frac{3P'^2Vn^2}{P^2} + \\
 &+ \frac{U'n}{r^2P'} - \frac{7V'}{3r} + \frac{P'^2Va^2}{\eta^2} - \frac{\mu'V'}{3\mu} + \\
 &+ \frac{P'^2Wan}{r^2\eta^3} + \frac{2P'\mu'Un}{3\mu P^2} + \frac{P'^2Wan}{P^2\eta} - \\
 &- \frac{2PP'^3\eta V'\mu'}{3r\mu} - \frac{2r^2P'^3V'}{3P^3} + \frac{P'^4\eta U\mu'n}{3r\mu P} + \\
 &+ \frac{8P'Un}{3rP^2} + \frac{r^2P'^4Un}{3P^5}, \\
 W'' &= -\frac{\mu'W'}{3\mu} + \frac{PP'^4U\mu'a}{3\mu r} + \frac{r^2P'^4Ua}{3\eta P^3} + \\
 &+ \frac{r^2\eta P'^2Ua}{P^3} - \frac{2\eta PP'^3W'\mu'}{3\mu r} - \frac{2r^2P'^3W'}{3P^3} + \\
 &+ \frac{2P'\mu'Ua}{3\mu\eta} + \frac{P'U'a}{\eta} + \frac{\eta U'a}{P'} + \frac{P'^2Wn^2}{P^2} + \\
 &+ \frac{P'^2Van}{\eta} + \frac{r^2\eta P'^2Van}{P^2} + \frac{3P'^2Wa^2}{\eta^2} + \frac{2P'Ua}{3r\eta} - \frac{W'}{3r}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Линеаризованные граничные условия для системы (11) примут вид

$$\begin{aligned}
 &\frac{3\mu(r_0)U'(r_0)}{P'(r_0)^4} + \frac{\mu(r_0)P(r_0)\eta V(r_0)n}{r_0} + \\
 &+ \frac{\mu(r_0)P(r_0)W(r_0)a}{r_0} + \frac{\mu(r_0)\eta U(r_0)}{r_0} + \\
 &+ \frac{pP(r_0)W(r_0)a}{r_0} + \frac{p\eta U(r_0)}{r_0} + \frac{pP(r_0)\eta V(r_0)n}{r_0} = 0, \\
 &- \frac{r_0^2\mu(r_0)U(r_0)n}{P'(r_0)P(r_0)^3} - \frac{\mu(r_0)U(r_0)n}{P'(r_0)^3P(r_0)} + \frac{\mu(r_0)U(r_0)\eta}{r_0} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{r_0^2\mu(r_0)V'(r_0)}{P'(r_0)^2P(r_0)} + \frac{pU(r_0)n\eta}{r_0} = 0, \\
 &\frac{\mu(r_0)U(r_0)a}{P'(r_0)\eta^3} + \frac{\mu(r_0)U(r_0)a}{P'(r_0)^3\eta} - \frac{\mu(r_0)U(r_0)aP(r_0)}{r_0} - \\
 &- \frac{\mu(r_0)W'(r_0)}{P'(r_0)^2\eta^2} - \frac{pU(r_0)aP(r_0)}{r_0} = 0, \\
 &\frac{3\mu U'(r_1)}{P'(r_1)^4} + \frac{\mu P(r_1)\eta V(r_1)n}{r_1} + \\
 &+ \frac{\mu P(r_1)W(r_1)a}{r_1} + \frac{\mu \eta U(r_1)}{r_1} = 0, \\
 &- \frac{r_1^2\mu U(r_1)n}{P'(r_1)P(r_1)^3} - \frac{\mu U(r_1)n}{P'(r_1)^3P(r_1)} + \\
 &+ \frac{\mu U(r_1)\eta}{r_1} + \frac{r_1^2\mu V'(r_1)}{P'(r_1)^2P(r_1)} = 0, \\
 &- \frac{\mu U(r_1)a}{P'(r_1)\eta^3} - \frac{\mu U(r_1)a}{P'(r_1)^3\eta} + \\
 &+ \frac{\mu U(r_1)aP(r_1)}{r_1} + \frac{\mu W'(r_1)}{P'(r_1)^2\eta^2} = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Областью устойчивости будем называть область таких значений параметров деформации, для которых краевая задача (12) имеет только тривиальное решение.

В качестве примера рассмотрим цилиндр из упрощенного материала Блейтца и Ко со следующими геометрическими характеристиками:  $r_0/r_1 = 0,5$ ,  $h/r_1 = 10$ . Закон, по которому изменяется модуль сдвига, примем в экспоненциальной форме

$$\mu(r) = \mu_1 \exp\left(-\frac{\ln(\mu_0/\mu_1)(r-r_1)}{(r_1-r_0)}\right),$$

где  $\mu_0$  – значение модуля сдвига на внутренней границе,  $\mu_1$  – на внешней. Вычисления показали, что область устойчивости такого цилиндра при раздувании внутренним давлением и осевом растяжении будет полностью определяться кривыми устойчивости для мод (1,0), (1,1), (1,2), (2,2). На рис. 1 дано сравнение областей устойчивости однородного и неоднородного (с экспоненциальной неоднородностью) цилиндров при соотношении  $\mu_1/\mu_0 = 100$ ; в качестве безразмерных деформационных параметров выбраны коэффициенты растяжения  $\eta$  и расширения  $\xi_1 = P(r_1)/r_1$  цилиндра.

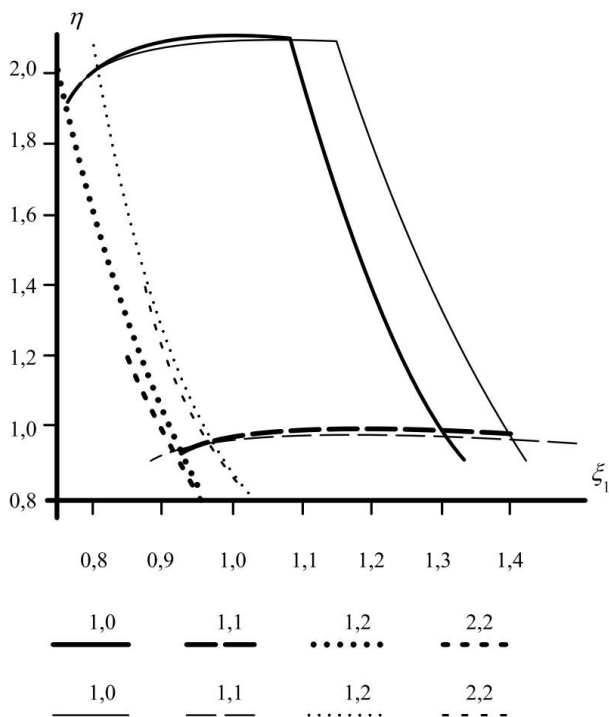


Рис. 1. Области устойчивости для однородного (полужирные кривые) [8] и неоднородного цилиндров / Fig. 1. Stability domains for a homogeneous (bold curves) [8] and inhomogeneous cylinder

Более толстыми линиями на рис. 1 выделена граница области с постоянным модулем сдвига. Учет неоднородности приводит к смещению области устойчивости вправо при сохранении ее основных черт.

### Раздувание и осевое растяжение двухслойного цилиндра

Схема анализа в данном разделе основывается на подходе, представленном в работе [2]. Напряженно-деформированное состояние двухслойного цилиндра (рис. 2) будем также изучать на основе полуобратного метода:

$$R = P_i(r), \Phi = \varphi, Z = \eta z, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Отличие (13) от (3) состоит в использовании индекса  $i$ , определяющего номер слоя. Соотношение толщин слоев в отсчетной конфигурации определяется параметром  $r_c$ , а функции  $P_i(r)$  соответствуют изменению радиальной координаты точки цилиндра  $i$ -го слоя.

Таким образом, в (13) приведены два полуобратных представления. Для каждого слоя вычисление геометрических характеристик деформации и вывод уравнений равновесия должны осуществляться раздельно. Это означает, в частности, что уравнения (4) и (5) должны быть выписаны для каждого слоя.

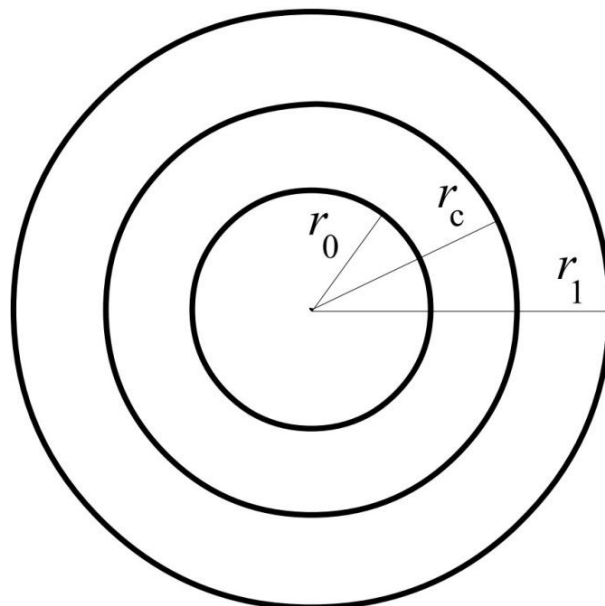


Рис. 2. Схема двухслойного цилиндра / Fig. 2. Scheme of a two-layer cylinder

На внутренней и внешней боковых поверхностях составного трехмерного тела должны выполняться условия, соответствующие раздуванию цилиндра внутренним давлением интенсивности  $p$ . Для задания граничных условий на поверхности раздела слоев  $r = r_c$  введем неизвестный пока параметр

$p_c$ , формально играющий роль внешнего давления для внутреннего цилиндра и внутреннего – для внешнего. Таким образом, задача сводится к совместному решению двух дифференциальных уравнений в своей области с согласованными граничными условиями в точке стыковки областей вида

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D}_1 &= 0, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1|_{r=r_0} &= -p \mathbf{J} \mathbf{C}_1^{-1} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=r_0}, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_1|_{r=r_c} &= -p_c \mathbf{J} \mathbf{C}_1^{-1} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=r_c}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_2 &= 0, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_2|_{r=r_1} &= -p \mathbf{J} \mathbf{C}_2^{-1} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=r_1}, \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{D}_2|_{r=r_c} &= -p_c \mathbf{J} \mathbf{C}_2^{-1} \cdot \mathbf{e}_r|_{r=r_c}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $J = \det \mathbf{C}$ .

Будем считать, что материал обоих слоев цилиндра описывается упрощенной моделью Блейтца и Ко (2). Тогда уравнения равновесия для каждого слоя записываются в виде

$$P_i'' = \frac{\mu_i P_i' (P_i^3 - r^3 P_i^3)}{3r P_i^3}. \quad (15)$$

Граничные условия для них имеют вид (7) или (8) с учетом корректировки на индекс слоя и наличие параметра  $P_c$ .

Для исследования устойчивости снова прибегнем к бифуркационному подходу. Выражение (13) запишем в виде

$$\begin{cases} R = P_i(r) + \varepsilon u_i(r, \varphi, z), \\ \Phi = \varphi + \varepsilon v_i(r, \varphi, z), \\ Z = \eta z + \varepsilon w_i(r, \varphi, z). \end{cases}$$

Как и ранее, полагаем, что цилиндр деформируется в жестком нагружающем устройстве. Это приводит к граничным условиям на торцах цилиндра, позволяющим использовать схему разделения переменных (10) для каждого слоя. После разделения переменных будет получена система из шести дифференциальных уравнений относительно функций  $U_i, V_i, W_i$  с двенадцатью краевыми условиями.

В качестве примера рассмотрим цилиндр следующей геометрии:  $r_0/r_1 = 0,7$ ;  $h/r_1 = 10$ . Через  $\delta_i$  будем обозначать толщину  $i$ -го слоя. На рис. 3 приведены диаграммы нагружения, наглядно демонстрирующие наличие падающего участка при различных типах геометрии цилиндра. Через  $P_1$  обозначается отношение внутреннего давления  $p$  к  $\mu_2$ .

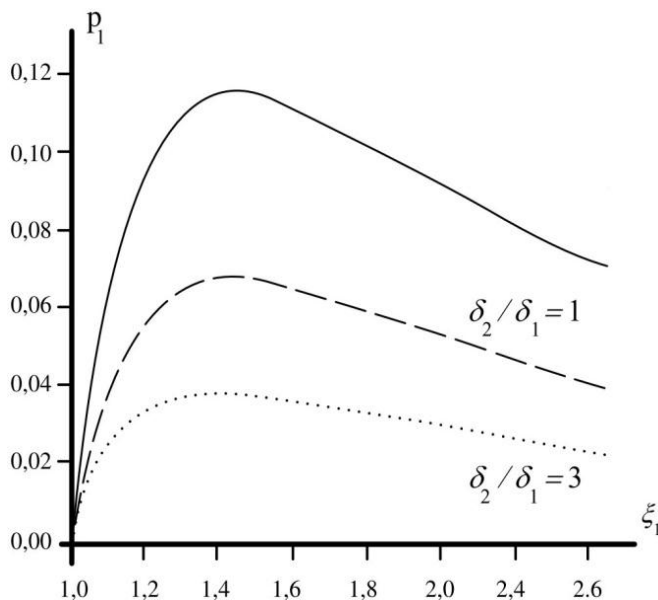


Рис. 3. Диаграмма нагружения двухслойного цилиндра при  $\eta = 1$ ,  $\mu_1/\mu_2 = 10$  / Fig. 3. The two-layer cylinder loading diagram

Анализ устойчивости при растягивающих напряжениях показал, в частности, что для цилиндра с более жестким внешним слоем область устой-

чивости смещается вправо по сравнению с однородным цилиндром; более мягкий внешний слой приводит к смещению этой области в левую сторону.

### Использование двух типов определяющих соотношений

Рассмотрим цилиндр, аналогичный приведенному на рис. 2. Будем считать, что материалы двух его слоев описываются различными законами состояния, т.е. им соответствуют различные функции удельной потенциальной энергии деформации. Внутренний слой будет описываться моделью Мурнагана, удельная потенциальная энергия которого имеет вид

$$W = \frac{1}{4}(W_1 + W_2 + W_3), \quad (16)$$

$$W_1 = \left(-3\lambda - 2\mu + \frac{9}{2}l + \frac{n_1}{2}\right)I_1 + \frac{n_1}{2}(I_3 - 1),$$

$$W_2 = \frac{1}{2}(\lambda + \mu - 3l - 2m_1)I_1^2 + \frac{1}{6}(l + 2m_1)I_1^3,$$

$$W_3 = \left(-2\mu + 3m_1 - \frac{n_1}{2}\right)I_2 - m_1 I_1 I_2 + \frac{1}{2}(9\lambda + 6\mu - 9l).$$

Для описания свойств внешнего слоя используем модель Блейтца и Ко.

Основой исследования опять является полубратная схема сведения трехмерной задачи к одномерной. Уравнение равновесия в области материала Блейтца и Ко имеет вид (15), а в области, где находится материал Мурнагана, оно запишется следующим образом:

$$P'' = -\frac{F}{G}, \quad (17)$$

$$\text{где } F = \sum_{i=1}^8 F_i, \quad G = r^2 \sum_{k=1}^4 G_k,$$

$$F_1 = -P^5 l - 2P^5 m_1 - 6P' l \eta^2 r^5 + 2P' m_1 \eta^2 r^5 + 2P'^3 l \eta^2 r^5 + 2P' \lambda \eta^2 r^5 + P' l \eta^4 r^5,$$

$$F_2 = -P' n_1 \eta^2 r^5 - 4P' \mu r^5 + 2P'^5 m_1 r^5 - 6P'^3 l r^5 - 4P'^3 m_1 r^5 + 9P' l r^5 - 6P' \lambda r^5,$$

$$F_3 = 2P'^3 \lambda r^5 + P'^5 l r^5 + 4P'^3 \mu r^5 + P' n_1 r^5 - P' n_1 P^2 \eta^2 r^3 - 2m_1 \eta^2 P P'^2 r^4,$$

$$F_4 = 2l \eta^2 P P'^2 r^4 + 2P' m_1 \eta^2 P^2 r^3 + n_1 P \eta^2 P'^2 r^4 - 3P' l P^4 r - 2P' m_1 P^2 r^3,$$

$$F_5 = -2P'l\eta^2 P^2 r^3 - 2P^3 \lambda r^2 + 6P^3 l r^2 - \\ - P n_1 r^4 - 4P^3 \mu r^2 + 4P^3 m_1 r^2 + 4P \mu r^4,$$

$$F_6 = -9Plr^4 + 6P\lambda r^4 - 6lPP'^2 r^4 + \\ + 3lP'^4 Pr^4 - 2P\lambda\eta^2 r^4 + 6Pl\eta^2 r^4 + Pn_1\eta^2 r^4,$$

$$F_7 = -2Pm_1\eta^2 r^4 - 2P^3 l\eta^2 r^2 - \\ - Pl\eta^4 r^4 + 6P'lP^2 r^3 - 2P'\lambda P^2 r^3,$$

$$F_8 = P'n_1 P^2 r^3 - n_1 P P'^2 r^4 + 2\lambda P P'^2 r^4 - \\ - 2lP^3 P^2 r^3 + 2m_1 P P'^2 r^4 + 2lP^3 P'^2 r^2,$$

$$G_1 = 9lr^4 - 4\mu r^4 + n_1 r^4 - 6\lambda r^4 + 2r^4 \lambda \eta^2 - \\ - 6r^4 l \eta^2 + 2r^4 m_1 \eta^2 + l \eta^4 r^4 - n_1 r^4 \eta^2,$$

$$G_2 = lP^4 + 2lP^2 \eta^2 r^2 + n_1 P^2 \eta^2 r^2 - 2m_1 r^2 P^2 \eta^2 + \\ + 6lP'^2 r^2 P^2 - 18r^4 l P'^2 - 12r^4 m_1 P'^2,$$

$$G_3 = 10m_1 P'^4 r^4 + 2r^2 \lambda P^2 - 6r^2 l P^2 + \\ + 2r^2 m_1 P^2 - n_1 r^2 P^2 + 6lP'^2 r^4 \eta^2 + 6r^4 \lambda P'^2.$$

$$G_4 = 12r^4 \mu P'^2 + 5lP'^4 r^4.$$

Краевые условия на границе раздела цилиндров получаются аналогично предыдущему случаю с использованием неизвестной функции давления.

В качестве набора констант выберем комбинацию, соответствующую стали REX 535 :

$$\mu = 0,818 \cdot 10^2 \text{ ГПа}; \quad \lambda = 1,09 \cdot 10^2 \text{ ГПа};$$

$$l = -0,86 \cdot 10^2 \text{ ГПа}; \quad m = -6,29 \cdot 10^2 \text{ ГПа};$$

$n = -7,28 \cdot 10^2 \text{ ГПа}$  [9]. Особенности поведения однородного цилиндра из материала такого типа рассмотрены ранее в [10, 11]. Второй слой будет описываться моделью Блейтца и Ко (1), причем рассмотрены два варианта этой модели: упрощенный (2) с параметром  $\mu = 0,818 \cdot 10^2 \text{ ГПа}$  и полная версия с константами  $\alpha = 0,66626$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mu = 0,818 \cdot 10^2 \text{ ГПа}$ . Третий набор констант обеспечивает «тождественность» моделей (1) и (16) в области малых деформаций.

Несмотря на весьма громоздкий характер уравнения (17), численное решение полученной краевой задачи не представляло принципиальной сложности. Расчеты подтвердили, что диаграммы нагружения для обоих цилиндров с геометрическими характеристиками  $\delta_1 = \delta_2$ ,  $r_0/r_1 = 0,7$ ,  $h/r_1 = 10$  имеют падающий участок. Результаты бифуркационного анализа показали, что область

устойчивости однородного цилиндра из материала Мурнагана содержится в области устойчивости цилиндра из материала Блейтца и Ко; область устойчивости составного цилиндра занимает промежуточное положение.

### Заключение

В работе проведено исследование равновесия и устойчивости тела в форме полого кругового цилиндра из сжимаемого нелинейно-упругого материала. Рассмотрены два случая неоднородности: непрерывная, когда один из модулей материала является непрерывной функцией радиальной координаты, и разрывная, когда цилиндр считается состоящим из двух частей с различными свойствами, в том числе описываемыми различными определяющими соотношениями. Основным методом построения равновесного состояния являлся полуобратный метод нелинейной теории упругости. Исследование устойчивости осуществлялось в рамках статического бифуркационного подхода.

Проведенный анализ показал, в частности, высокую степень надежности и эффективности использованной вычислительной схемы. Установлено, что неоднородность свойств заметно влияет на положение и размер зон устойчивости в области растягивающих напряжений, причем может оказывать как стабилизирующее влияние, т.е. повышать величину критических деформаций, так и наоборот – приводить к их понижению.

### Литература

1. *Silvestre N.* Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression // *International J. of Solids and Structures*. 2008. Vol. 45, № 16. P. 4427–4447.
2. *Шейдаков Д.Н., Михайлова И.Б.* Устойчивость нелинейно-упругой трехслойной трубы с основой из пенистого материала // *Вестн. ЮНЦ РАН*. 2015. Т. 11, № 1. С. 24–29.
3. *Rama Satya Sandilya V., Rai P.K., Shekhar S., Mondal K.* A novel method for fabricating multilayered steels // *Materials Processing Tech*. 2018. Vol. 245. P. 38–51.
4. *Poddar P., Kamaraj A., Murugesan A.P., Bagui S., Sahoo K.L.* Microstructural features of Mg-8 % Sn alloy and its correlation with mechanical properties // *J. of Magnesium and Alloys*. 2017. Vol. 5. P. 348–354.
5. *Blatz P. J., Ko W. L.* Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials // *Transactions of the Society of Rheology*. 1962. Vol. 6. P. 223–251.

6. Карякин М.И. Равновесие и устойчивость растягиваемого нелинейно-упругого стержня // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2007. № 4. С. 22–27.

7. Александрин М.В., Карякин М.И. Об устойчивости растяжения нелинейно-упругого цилиндра // Экол. вестн. науч. центров ЧЭС. 2010. № 1. С. 7–12.

8. Obrezkov L.P. Equilibrium and stability of nonlinearly elastic cylinder made of Blatz-Ko material // Engineering Transactions. 2016. Vol. 64, № 4. P. 457–463.

9. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

10. Карякин М.И., Обрезков Л.П. Устойчивость цилиндра из материала Мурнагана при растяжении, сжатии и раздувании // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81, № 1. С. 30–39.

11. Зингерман К.М. Проверка условия сильной эллиптичности для материала Мурнагана при всестороннем растяжении или сжатии // Вестн. ТвГУ. Прикладная математика. 2003. № 1. С. 65–70.

#### References

1. Silvestre N. (2008). Buckling behaviour of elliptical cylindrical shells and tubes under compression. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 16, pp. 4427-4447.

2. Sheidakov D.N., Mikhailova I.B. (2015). The stability of a nonlinear-elastic three-layer pipe with a foam base. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo Tsentra RAN*, vol. 11, no. 1, pp. 24-29. (in Russian).

3. Rama Satya Sandilya V., Rai P.K., Shekhar S., Mondal K. (2018). A novel method for fabricating multi-

layered steels. *Materials Processing Tech.*, vol. 245, pp. 38-51.

4. Poddar P., Kamaraj A., Murugesan A.P., Bagui S., Sahoo K.L. (2017). Microstructural features of Mg-8 % Sn alloy and its correlation with mechanical properties. *J. of Magnesium and Alloys*, vol. 5, pp. 348-354.

5. Blatz P.J., Ko W.L. (1962). Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, vol. 6, pp. 223-251.

6. Karyakin M.I. (2007). Equilibrium and stability of the stretching nonlinearly elastic rod. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki (Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science)*, no. 4, pp. 22-27. (in Russian).

7. Aleksandrinn M.V., Karyakin M.I. (2010). On the stability of the nonlinearly elastic cylinder at the extension. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov ChES*, no. 1, pp. 7-12. (in Russian).

8. Obrezkov L.P. (2016). Equilibrium and stability of nonlinearly elastic cylinder made of Blatz-Ko material. *Engineering Transactions*, vol. 64, no. 4, pp. 457-463.

9. Lurie A.I. (1980). *Nonlinear theory of elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 512 p. (in Russian).

10. Karyakin M.I., Obrezkov L.P. (2019). Stability of a cylinder from Murnaghan material under stretching, compression and inflation. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, vol. 81, no. 1, pp. 30-39. (in Russian).

11. Zingerman K.M. (2003). Verification of the condition of strong ellipticity for Murnaghan's nonlinear elastic material undergoing uniform volumetric tension or compression. *Vestnik TvGU. Prikladnaya matematika*, no. 1, pp. 65-70. (in Russian).

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-61-71

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

© 2020 г. М.Ф. Мехтиев<sup>1</sup>, Н.К. Ахмедов<sup>2</sup>, С.М. Юсубова<sup>3</sup><sup>1</sup> Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан,<sup>2</sup> Азербайджанский государственный экономический университет (UNEC), Баку, Азербайджан,<sup>3</sup> Лицей имени Гейдара Алиева, Баку, Азербайджан

## ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE SOLUTION TO THE AXISYMMETRIC DYNAMICAL PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY FOR THE TRANSVERSALLY ISOTROPIC SPHERICAL LAYER OF SMALL THICKNESS

M.F. Mehdiyev<sup>1</sup>, N.K. Akhmedov<sup>2</sup>, S.M. Yusubova<sup>3</sup><sup>1</sup> Baku State University, Baku, Azerbaijan,<sup>2</sup> Azerbaijan State University of Economics (UNEC), Baku, Azerbaijan,<sup>3</sup> G. Aliyev Lyceum, Baku, Azerbaijan

Мехтиев Магомед Фарман-оглы – доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Азербайджана, декан факультета прикладной математики и кибернетики, Бакинский государственный университет, ул. Академика Захида Халилова, 23, г. Баку, AZ 1148, Азербайджан, e-mail: mehtiev\_magomed@mail.ru

Magomed F. Mehdiyev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Academician, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Dean of the Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics, Baku State University, Akademik Zahid Khalilov St., 23, Baku, AZ 1148, Azerbaijan, e-mail: mehtiev\_magomed@mail.ru

Ахмедов Натик Каракиши-оглы – доктор математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и статистики, Азербайджанский государственный экономический университет (UNEC), ул. Истиглалият, 6, г. Баку, AZ 1001, Азербайджан, e-mail: anatiq@gmail.com

Natik K. Akhmedov - Doctor of Mathematics, Professor, Head of the Department of Mathematics and Statistics, Azerbaijan State University of Economics (UNEC), Istiglaliyat St., 6, Baku, AZ 1001, Azerbaijan, e-mail: anatiq@gmail.com

Юсубова Севиндж Мамед-кызы – преподаватель, Лицей имени Гейдара Алиева, ул. Н. Алиева, 50, г. Баку, AZ 1025, Азербайджан, e-mail: sevinc.yusubova.75@mail.ru

Sevinj M. Yusubova - Lecturer, G. Aliyev Lyceum, N. Aliyev St., 50, Baku, AZ 1025, Azerbaijan, e-mail: sevinc.yusubova.75@mail.ru

Изучается осесимметричная динамическая задача теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины, не содержащего ни один из полюсов  $0$  и  $\pi$ . Предполагается, что лицевые поверхности сферического слоя свободны от напряжений, а на конических сечениях задана нагрузка. С помощью асимптотического интегрирования уравнений теории упругости проведен анализ динамической задачи теории упругости для трансверсально-изотропного сферического слоя при стремлении параметра тонкостенности к нулю. В зависимости от частоты вынуждающих нагрузок изучена возможная форма волнообразования. Построены однородные решения и проведена их классификация. Получены асимптотические разложения однородных решений, позволяющие рассчитать напряженно-деформированное состояние при различных значениях частоты вынуждающих нагрузок. Показано, что для высокочастотного колебания в первом члене асимптотики дисперсионное уравнение совпадает с известным уравнением Рэлея – Лэмба для упругой полосы. В общем случае нагружения сферы с помощью вариационного принципа Гамильтона краевая задача сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

**Ключевые слова:** трансверсально-изотропный сферический слой, уравнение движения, краевая задача, спектральный параметр, асимптотическое представление, принцип Гамильтона, пограничный слой, краевой эффект, функция Лежандра.

In this paper, we study the axisymmetric dynamic problem of the theory of elasticity for the transversely isotropic spherical layer of small thickness that does not contain any of the poles 0 and  $\pi$ . It is assumed that the lateral surface of the sphere is free of stresses, and boundary conditions are set on conical sections. Using the method of asymptotic integration of equations of the theory of elasticity, the dynamic problem of this theory is analyzed for the transversely isotropic spherical layer as the thin-walled parameter tends to zero. A possible form of wave formation in the transversely isotropic spherical layer has been studied depending on the frequency of the influencing forces. Homogeneous solutions are constructed and their classification is given. Asymptotic expansions of the homogeneous solutions are obtained, which make possible to calculate the stress-strain state for various values of the frequency of the influencing forces. It is shown that for the high-frequency oscillations in the first term of the asymptotics, the dispersion equation coincides with the well-known Rayleigh-Lamb equation for the elastic band. In the general case of loading on the sphere using the Hamilton variational principle, the boundary-value problem is reduced to the solving infinite systems of linear algebraic equations.

**Keywords:** transversely isotropic spherical layer, equation of motion, boundary value problem, spectral parameter, asymptotic representation, Hamilton principle, boundary layer, edge effect, Legendre function.

## Введение

Теория оболочек является одной из важнейших областей современной механики. На её основе разрабатываются методы расчета тонкостенных конструкций, которые широко применяются в современных сооружениях и машиностроении. Требования прочности, легкости и экономичности, предъявляемые к современным конструкциям, делают тонкие оболочки незаменимыми конструктивными элементами. Однако расчет оболочек на основании трехмерных уравнений теории упругости связан со значительными математическими трудностями. Поэтому приходится обращаться к различным приближенным методам, позволяющим упростить расчет оболочек. Здесь в первую очередь принимается во внимание тот геометрический факт, что толщина оболочки по сравнению с двумя другими ее размерами мала. Проблема сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной составляет основное содержание теории оболочек [1].

Решение трёхмерных задач для анизотропных оболочек связано с дополнительными трудностями, обусловленными значительным увеличением числа механических параметров, характеризующих конструкцию. В отличие от изотропных оболочек спектр краевых задач для анизотропных оболочек имеет точки разветвления в верхней части спектра. Появляются новые группы решений, которые характерны только для анизотропных оболочек [2].

### Постановка краевой задачи для трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины

Рассмотрим осесимметричную динамическую задачу теории упругости для трансверсально-изотропного полого сферического слоя малой тол-

щины. Предположим, что в сферической системе координат сферический слой занимает объем

$$\Gamma = \{r \in [R_1; R_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \phi \in [0; 2\pi]\}$$

и не содержит ни один из плюсов 0 и  $\pi$ .

Поверхность  $\theta = const$  является поверхностью изотропии. Сферические части границы тела будем называть лицевыми поверхностями.

Уравнения движения при отсутствии массовых сил в сферической системе координат имеют вид [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = \\ = g \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} ((\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}) = \\ = g \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $u_r = u_r(r, \theta, t)$ ,  $u_\theta = u_\theta(r, \theta, t)$  – компоненты вектора смещений;  $g$  – плотность;  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$ ,  $\sigma_{\phi\phi}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  – компоненты тензора напряжений, которые выражаются через компоненты вектора перемещений следующим образом [4]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + A_{12} \left( \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \sigma_{r\theta} = A_{44} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\phi\phi} = A_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (A_{22} + A_{23}) \frac{u_r}{r} + \\ + A_{22} \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{A_{23}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} = A_{12} \frac{\partial u_r}{\partial r} + (A_{22} + A_{23}) \frac{u_r}{r} + \\ + A_{23} \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{A_{22}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $A_{ij}$  – модули упругости.

Подставляя (2) в (1), получаем уравнения движения в перемещениях:



$$\left\{ \begin{aligned} & b_{11} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} b_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} \left[ \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg}\theta + 2(b_{12} - b_{22} - b_{23})u_\rho \right] + \\ & + (1 + b_{12}) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg}\theta + (b_{12} - b_{22} - b_{23} - 1) \times \\ & \times \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg}\theta \right) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \tau^2}, \quad (3) \\ & \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} \left[ b_{22} \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg}\theta \right) - \right. \\ & \left. - (b_{23} + b_{22} \operatorname{ctg}^2\theta + 2)u_\theta \right] + \\ & + (1 + b_{12}) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta \partial \rho} + (b_{22} + b_{23} + 2) \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} = \\ & = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \right.$$

В (3)  $\rho = \frac{r-R_0}{\varepsilon R_0}$  – новая безразмерная радиальная

координата;  $\tau = \frac{t}{R_0} \sqrt{\frac{A_{44}}{g}}$  – безразмерное время;

$R_0 = \frac{R_1+R_2}{2}$  – радиус срединной поверхности сферы;  $\varepsilon = \frac{R_2-R_1}{2R_0}$  – малый параметр, характеризующий

толщину сферического слоя;  $u_\rho = \frac{u_r}{R_0}$ ,  $u_\theta = \frac{u_\theta}{R_0}$ ,

$b_{ij} = \frac{A_{ij}}{A_{44}}$  – безразмерные величины;  $\rho \in [-1; 1]$ .

Предполагаем, что лицевые поверхности сферического слоя свободны от напряжений

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \left( \frac{1}{\varepsilon} b_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{b_{12}}{1+\varepsilon\rho} (u_\theta \operatorname{ctg}\theta + 2u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \right) = 0, \\ \sigma_{\rho\theta} &= \left( \frac{1}{\varepsilon} b_{11} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{1+\varepsilon\rho} \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right) = 0 \quad (4) \\ & \text{при } \rho = \pm 1, \end{aligned} \right.$$

а на торцах (конических срезах) заданы следующие граничные условия:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_s} &= f_{1s}(\rho) e^{i\lambda\tau}, \\ \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_s} &= f_{2s}(\rho) e^{i\lambda\tau}, \quad s = 1, 2. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Здесь  $\lambda$  – частота колебаний;  $\sigma_{\rho\rho} = \frac{\sigma_{rr}}{A_{44}}$ ,

$\sigma_{\rho\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{A_{44}}$  – безразмерные напряжения.

Решения уравнений (3) будем искать в виде

$$u_\rho = a(\rho) m(\theta) e^{i\lambda\tau}, \quad u_\theta = c(\rho) m'(\theta) e^{i\lambda\tau}, \quad (6)$$

где функция  $m(\theta)$  – решение уравнения Лежандра [5]:

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta m'(\theta) + \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) m(\theta) = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (3) и (4), с учетом (7) получим краевую задачу

$$\left\{ \begin{aligned} & b_{11} a''(\rho) + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} b_{11} a'(\rho) + \\ & + \left[ \left( 2(b_{12} - b_{22} - b_{23}) - \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{(1+\varepsilon\rho)^2} + \lambda^2 \right] \varepsilon^2 a(\rho) + \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) \times \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ (b_{22} - b_{12} + b_{23} + 1) \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} c(\rho) - \right. \\ & \left. - (1 + b_{12}) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} c'(\rho) \right] = 0, \\ & c''(\rho) + \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} c'(\rho) + \\ & + \left[ \lambda^2 - \left( \left( z^2 - \frac{5}{4} \right) b_{22} + b_{23} + 2 \right) \frac{1}{(1+\varepsilon\rho)^2} \right] \varepsilon^2 c(\rho) + \\ & + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} (1 + b_{12}) a'(\rho) + \frac{\varepsilon^2}{(1+\varepsilon\rho)^2} (2 + b_{22} + \\ & + b_{23}) a(\rho) = 0, \\ & \left[ b_{11} a'(\rho) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} b_{12} \left( 2a(\rho) - \left( z^2 - \frac{1}{4} \right) c(\rho) \right) \right]_{\rho=\pm 1} = 0, \\ & \left[ c'(\rho) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\rho} (a(\rho) - c(\rho)) \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \end{aligned}$$

### Анализ колебаний трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины при конечном значении $\lambda$

Изучим спектральную задачу (8) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Пусть  $\lambda = O(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Спектральная задача (8) при конечном  $\lambda$  имеет три группы спектрального параметра  $z$  со следующими асимптотическими свойствами:

1<sup>0</sup>) первая группа состоит из двух спектральных параметров  $z_k = O(1)$ ,  $k = 1, 2$ ;

2<sup>0</sup>) вторая – из четырех спектральных параметров  $z_k$ , которые имеют порядок  $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$ ;

3<sup>0</sup>) третья содержит счетное множество спектральных параметров  $z_n$ , которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Решение (8) ищем в виде

$$a = a_0^{(1)} + \varepsilon a_1^{(1)} + \dots, \quad c = c_0^{(1)} + \varepsilon c_1^{(1)} + \dots \quad (9)$$

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \dots$$

Подстановка (9) в (8) приводит к бесконечной системе. Последовательное интегрирование по  $\rho$  даёт соотношения для коэффициентов разложения (9). После некоторых преобразований для амплитудных значений перемещений и напряжений окончательно получаем

$$\left\{ \begin{aligned} u_\rho &= \sum_{k=1}^2 T_k \left[ \lambda^2 + t_1 + \left( z_{0k}^2 - \frac{1}{4} \right) t_2 + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta), \\ u_\theta &= \sum_{k=1}^2 T_k [-t_3 + O(\varepsilon)] m'_k(\theta), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \sum_{k=1}^2 T_k \varepsilon \left\{ (\rho + 1) \left[ (t_3 - \lambda^2) \left( \lambda^2 + t_1 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \left( z_{0k}^2 - \frac{1}{4} \right) t_2 \right) + \left( z_{0k}^2 - \frac{1}{4} \right) t_3^2 \right] + O(\varepsilon) \right\} m_k(\theta), \\ \sigma_{\rho\theta} &= O(\varepsilon^2), \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} &= \\ & = \sum_{k=1}^2 T_k \left\{ \left[ t_3 \left( \lambda^2 - t_1 \left( z_{0k}^2 - \frac{5}{4} \right) \right) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta) + \right. \\ & \left. + [-t_1 t_3 + O(\varepsilon)] m'_k(\theta) \operatorname{ctg}\theta \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^2 T_k \{ [t_3(\lambda^2 + t_1) + O(\varepsilon)] m_k(\theta) + (t_1 t_3 + O(\varepsilon)) m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \}.$$

Для определения  $z_{0k}$  имеем

$$z_{0k}^2 = (t_2 \lambda^2 - t_3 t_4)^{-1} \left( -\lambda^4 + \frac{3}{4} \lambda^2 t_5 - \frac{1}{4} t_3 t_6 \right), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= b_{22} - b_{23}; t_2 = b_{11}^{-1}(b_{12}^2 - b_{11} b_{22}); \\ t_3 &= b_{11}^{-1}(b_{11} b_{22} + b_{11} b_{23} - 2b_{12}^2); \\ t_4 &= b_{11}^{-1}(b_{11} b_{22} + b_{11} b_{23} - 2b_{12}^2 + 2); \\ t_5 &= b_{11}^{-1}(4b_{11} b_{23} + b_{11} b_{22} - 5b_{12}^2); \\ t_6 &= b_{11}^{-1}(9b_{11} b_{23} - 7b_{11} b_{22} - 2b_{12}^2 + 2). \end{aligned}$$

Из (11) получаем два чисто действительных или два чисто мнимых корня  $z_{0k}$ . Чисто мнимым корням  $z_{0k}$  соответствуют проникающие решения.

Все остальные спектральные параметры неограниченно возрастают при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , т.е.  $z_k \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Спектральные параметры разделяются на следующие группы в зависимости от их поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varepsilon z_k \rightarrow \operatorname{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Определим такие  $z_k \rightarrow \infty$ , для которых  $\varepsilon z_k \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Решение (8) будем искать в виде

$$\begin{aligned} a &= a_0^{(2)} + \varepsilon a_1^{(2)} + \dots, c = \varepsilon(c_0^{(2)} + \varepsilon c_1^{(2)} + \dots), \\ z &= \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \dots). \end{aligned} \quad (12)$$

После подстановки (12) в (8) имеем

$$\begin{aligned} u_\rho &= \sum_{k=1}^4 B_k [t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2 + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \\ u_\theta &= -\sum_{k=1}^4 \varepsilon B_k \{ [t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2] \rho + t_9 + \\ &+ \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2 + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta), \\ \sigma_{\rho\rho} &= \sum_{k=1}^4 \varepsilon B_k \{ (t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2) \times \\ &\times [(t_9 + \lambda^2 - t_7)(\rho + 1) - \frac{1}{2} t_2 \alpha_{0k}^4 (\frac{1}{3} \rho^3 - \rho - \frac{2}{3}) + \\ &+ \alpha_{0k}^2 (\rho + 1)^2 t_3 + \frac{1}{3} t_8 \alpha_{0k}^2 (\rho^2 - 1)] - \\ &- (t_9 + \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2) \times \\ &\times (\frac{1}{2} t_2 \alpha_{0k}^4 (\rho + 1)^2 + \\ &+ (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2 (\rho + 1)) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta), \\ \sigma_{\rho\theta} &= \sum_{k=1}^4 \varepsilon B_k \{ [t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2] \times \\ &\times [\frac{1}{2} t_2 \alpha_{0k}^2 (\rho^2 - 1) - t_3 (\rho + 1)] + \\ &+ t_2 \alpha_{0k}^2 (\rho + 1) [t_9 + \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2] + \\ &+ O(\varepsilon) \} m'_k(\theta), \\ \sigma_{\phi\phi} &= \sum_{k=1}^4 B_k \{ [-t_{10} \alpha_{0k}^2 (t_9 + \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2) + \\ &+ (t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2) (t_3 - t_{10} \alpha_{0k}^2 \rho) + \\ &+ O(\varepsilon)] m_k(\theta) + \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon t_1 [-(t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2) \rho - t_9 - \lambda^2 + t_7 - \frac{t_2}{3} \alpha_{0k}^4 - t_3 \alpha_{0k}^2 + O(\varepsilon)] m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \sum_{k=1}^4 B_k \{ [(t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2) + \\ &+ (t_3 - t_2 \alpha_{0k}^2 \rho) - \\ &- \alpha_{0k}^2 t_2 (t_9 + \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2) + \\ &+ O(\varepsilon)] m_k(\theta) + \varepsilon t_1 [(t_2 \alpha_{0k}^4 + (t_3 + 2t_2) \alpha_{0k}^2) \rho + \\ &+ t_9 + \lambda^2 - t_7 + \frac{1}{3} t_2 \alpha_{0k}^4 + t_3 \alpha_{0k}^2 + \\ &+ O(\varepsilon)] m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} t_7 &= 4b_{12} b_{11}^{-1} (b_{11} - b_{22}), \\ t_8 &= b_{11}^{-1} (2b_{12} b_{22} - b_{11} b_{22} - b_{11} b_{23} + 2b_{11}), \\ t_9 &= 2(2b_{12} - b_{23} - b_{22}), t_{10} = b_{11}^{-1} (b_{12}^2 - b_{11} b_{23}); \end{aligned}$$

$\alpha_{0k}$  определяем из соотношения

$$\alpha_{0k}^4 = 3b_{11}^{-1} t_2^{-2} (t_1 (2b_{12} b_{22} - b_{11} t_3 - 2b_{12}^2) - b_{11} t_2 \lambda^2). \quad (14)$$

Решение (7) можно записать через функции Лежандра. Однако, как показано в [6–8], удобно использовать приближенные методы.

В случае  $z_k = O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$  главный член асимптотического решения (7) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  принимает вид [9]

$$m_k(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{0k}^2}} \exp \left[ -\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-\alpha_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \right) \\ \text{в окрестности } \theta = \theta_1, \\ \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt{-\alpha_{0k}^2}} \exp \left[ \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-\alpha_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] \times \\ \times \left( 1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right) \right) \text{ в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases}$$

Из (14) получаем четыре комплексных корня или два действительных и два чисто мнимых. Комплексным корням соответствуют затухающие решения, аналогичные простому краевому эффекту в статике оболочек, чисто действительным – проникающие решения.

Определим такие  $z_k \rightarrow \infty$ , для которых  $\varepsilon z_k \rightarrow \operatorname{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Решение (8) ищем в виде

$$\begin{cases} a = \varepsilon(a_0^{(3)} + \varepsilon a_1^{(3)} + \dots), c = \varepsilon^2(c_0^{(3)} + \varepsilon c_1^{(3)} + \dots), \\ z = \varepsilon^{-1}(\delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \dots) \end{cases} \quad (15)$$

Для первых членов разложения получаем спектральную задачу

$$(\mathbf{L}_0 - \delta_0^2 \mathbf{L}_1) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (16)$$

$$(\mathbf{M}_0 - \delta_0^2 \mathbf{M}_1) \mathbf{u}_0|_{\rho=\pm 1} = \mathbf{0},$$

где

$$\mathbf{L}_0 = \begin{pmatrix} b_{11} \frac{d^2}{d\rho^2} & 0 \\ (1+b_{12}) \frac{d}{d\rho} & \frac{d^2}{d\rho^2} \end{pmatrix}; \mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & (1+b_{12}) \frac{d}{d\rho} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} b_{11} \frac{d}{d\rho} & 0 \\ 1 & \frac{d}{d\rho} \end{pmatrix}; \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{u}_0 = (a_0, c_0)^T.$$

Характеристическое уравнение (16) имеет вид  $\alpha^4 + 2e_1\delta_0^2\alpha^2 + \delta_0^4e_2 = 0$ , где  $2e_1 = (2b_{12} + b_{12}^2 - b_{11}b_{22})b_{11}^{-1}$ ,  $e_2 = b_{11}^{-1}b_{22}$ .

Рассмотрим следующие возможные случаи:

1)  $e_1 > 0$ ,  $e_1^2 - e_2 \neq 0$ .

$$\alpha_{1,2} = \pm i\delta_0 S_1, \alpha_{3,4} = \pm i\delta_0 S_2,$$

$$S_k = \sqrt{e_1 + (-1)^{k+1} \sqrt{e_1^2 - e_2}}, k = 1, 2:$$

а)  $S_1, S_2$  – вещественные и различные, если  $e_1^2 - e_2 > 0$ ;

б)  $S_1$  и  $S_2$  – комплексные, если  $e_1^2 - e_2 < 0$ ;

2)  $e_1 > 0$ ,  $e_1^2 = e_2$ .

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm i\delta_0 S, \text{ где } S = \sqrt{e_1};$$

3)  $e_1 < 0$ ,  $e_1^2 - e_2 \neq 0$ .

$$\alpha_{1,2} = \pm \delta_0 S_1, \alpha_{3,4} = \pm \delta_0 S_2;$$

$$S_k = \sqrt{|e_1| + (-1)^{k+1} \sqrt{e_1^2 - e_2}};$$

а)  $S_1$  и  $S_2$  – вещественные и различные, если  $e_1^2 - e_2 > 0$ ;

б)  $S_1$  и  $S_2$  – комплексные, если  $e_1^2 - e_2 < 0$ ;

4)  $e_1 < 0$ ,  $e_1^2 = e_2$ .

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm \delta_0 S, \text{ где } S = \sqrt{|e_1|}.$$

В случае 1 ( $e_1 > 0$ ,  $e_1^2 - e_2 \neq 0$ ) для перемещений и напряжений получаем два класса решений:

$$a) u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (1+b_{12}) S_1 S_2 \delta_{0k}^3 \times$$

$$\times [(b_{12} - b_{11} S_2^2) \cos(\delta_{0k} S_2) \cos(\delta_{0k} S_1 \rho) -$$

$$-(b_{12} - b_{11} S_1^2) \cos(\delta_{0k} S_1) \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^4 [-S_2 (1+b_{11} S_1^2) (b_{12} - b_{11} S_2^2) \times$$

$$\times \sin(\delta_{0k} S_1 \rho) \cos(\delta_{0k} S_2) + S_1 (b_{12} - b_{11} S_1^2) \times$$

$$\times (1+b_{11} S_2^2) \times$$

$$\times \cos(\delta_{0k} S_1) \sin(\delta_{0k} S_2 \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \{ (b_{12} - b_{11} S_1^2) (b_{12} - b_{11} S_2^2) \delta_{0k}^4 \times$$

$$\times [S_2 \sin(\delta_{0k} S_1 \rho) \cos(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- S_1 \cos(\delta_{0k} S_1) \sin(\delta_{0k} S_2 \rho)] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varepsilon (b_{12} - b_{11} S_1^2) (b_{12} - b_{11} S_2^2) S_1 S_2 \delta_{0k}^3 \times$$

$$\times [\cos(\delta_{0k} S_1 \rho) \cos(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) \cos(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^4 \{ [b_{23} (1+b_{11} S_1^2) - b_{12} (1+b_{12} S_1^2)] \times$$

$$\times (b_{12} - b_{11} S_2^2) S_2 \cos(\delta_{0k} S_2) \sin(\delta_{0k} S_1 \rho) -$$

$$- [b_{23} (1+b_{11} S_2^2) - b_{12} (1+b_{12} S_2^2)] (b_{12} - b_{11} S_1^2) S_1 \times$$

$$\times \cos(\delta_{0k} S_1) \sin(\delta_{0k} S_2 \rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^4 \{ [b_{22} (1+b_{11} S_1^2) - b_{12} (1+b_{12} S_1^2)] \times$$

$$\times (b_{12} - b_{11} S_2^2) S_2 \sin(\delta_{0k} S_1 \rho) \cos(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- [b_{22} (1+b_{11} S_2^2) - b_{12} (1+b_{12} S_2^2)] (b_{12} - b_{11} S_1^2) \times$$

$$\times S_1 \sin(\delta_{0k} S_2 \rho) \cos(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta).$$

В (17)  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения  $(S_1 + S_2) \sin((S_1 - S_2)\delta_{0k}) - (S_1 - S_2) \sin((S_1 + S_2)\delta_{0k}) = 0$ ; (18)

б)  $u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (1+b_{12}) S_1 S_2 \delta_{0k}^3 \times$   
 $\times [(b_{12} - b_{11} S_2^2) \sin(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2) -$   
 $-(b_{12} - b_{11} S_1^2) \sin(\delta_{0k} S_2 \rho) \sin(\delta_{0k} S_1)] m_k(\theta),$   
 $u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^2 [S_2 (1+b_{11} S_1^2) \times$  (19)

$$\times (b_{12} - b_{11} S_2^2) \cos(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- S_1 (1+b_{11} S_2^2) (b_{12} - b_{11} S_1^2) \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) \times$$

$$\times \sin(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \{ (b_{12} - b_{11} S_1^2) (b_{12} - b_{11} S_2^2) \delta_{0k}^4 \times$$

$$\times [S_1 \sin(\delta_{0k} S_1) \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) -$$

$$- S_2 \cos(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2)] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \varepsilon (b_{12} - b_{11} S_1^2) (b_{12} - b_{11} S_2^2) \times$$

$$\times S_1 S_2 \delta_{0k}^3 [\sin(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- \sin(\delta_{0k} S_2 \rho) \sin(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\phi\phi} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^4 \{ [b_{12} (1+b_{12}) S_1^2 - b_{23} (1+b_{12} S_1^2)] \times$$

$$\times (b_{12} - b_{11} S_2^2) S_2 \cos(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2) -$$

$$- [b_{12} (1+b_{12}) S_2^2 - b_{23} (1+b_{12} S_2^2)] (b_{12} - b_{11} S_1^2) \times$$

$$\times S_1 \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) \sin(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \delta_{0k}^4 \{ [b_{12} (1+b_{12}) S_1^2 - b_{22} (1+b_{11} S_1^2)] \times$$

$$\times (b_{12} - b_{11} S_2^2) S_2 \cos(\delta_{0k} S_1 \rho) \sin(\delta_{0k} S_2),$$

$$- [b_{12} (1+b_{12}) S_2^2 - b_{22} (1+b_{11} S_2^2)] (b_{12} - b_{11} S_1^2) \times$$

$$\times S_1 \cos(\delta_{0k} S_2 \rho) \sin(\delta_{0k} S_1) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta).$$

В (19)  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения  $(S_1 - S_2) \sin((S_1 + S_2)\delta_{0k}) + (S_1 + S_2) \sin((S_1 - S_2)\delta_{0k}) = 0$ . (20)

В случае 2 ( $e_1 > 0$ ,  $e_1^2 = e_2$ ) для перемещений и напряжений имеем:

а)  $u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \{ 2b_{11} S^2 \cos(\delta_{0k} S) \cos(\delta_{0k} S \rho) +$   
 $+(b_{12} - b_{11} S^2) \delta_{0k} S [\sin(\delta_{0k} S) \cos(\delta_{0k} S \rho) -$   
 $-\rho \cos(\delta_{0k} S) \sin(\delta_{0k} S \rho)] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left\{ \frac{(1+b_{11} S^2)(b_{11} S^2 - b_{12})}{1+b_{12}} \times \right.$$

$$\times [\sin(\delta_{0k} S) \sin(\delta_{0k} S \rho) +$$

$$+ \rho \cos(\delta_{0k} S) \cos(\delta_{0k} S \rho)] -$$

$$- \frac{b_{11}^2 S^4 + (3b_{11} + b_{12} b_{11}) S^2 - b_{12}}{\delta_{0k} S (1+b_{12})} \times$$

$$\left. \times \cos(\delta_{0k} S) \sin(\delta_{0k} S \rho) + O(\varepsilon) \right\} m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \frac{(b_{12}-b_{11}S^2)^2 \delta_{0k}}{(1+b_{12})S} \times \quad (21)$$

$$\times \{ [S\delta_{0k} \sin(\delta_{0k}S) - \cos(\delta_{0k}S)] \sin(\delta_{0k}S\rho) + S\delta_{0k}\rho \cos(\delta_{0k}S) \cos(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon Q_k \frac{(b_{12}-b_{11}S^2)}{1+b_{12}} \delta_{0k} S [\sin(\delta_{0k}S) \cos(\delta_{0k}S\rho) - \rho \sin(\delta_{0k}S\rho) \cos(\delta_{0k}S) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left\{ \frac{b_{12}-b_{11}S^2}{1+b_{12}} \cos(\delta_{0k}S) \times \right. \\ \times [(b_{22} - (b_{12} + b_{12}^2 - b_{11}b_{22})S^2) \delta_{0k}^2 \rho \cos(\delta_{0k}S\rho) - \\ \left. - \frac{(b_{12}+b_{12}^2-b_{11}b_{22})S^2+b_{22}}{S} \delta_{0k} \sin(\delta_{0k}S\rho)] + \right.$$

$$\left. + \delta_{0k} \frac{(b_{22}+(b_{22}b_{11}-b_{12}-b_{12}^2)S^2)}{1+b_{12}} \times \right. \\ \times [2b_{11}S \cos(\delta_{0k}S) + (b_{12} - b_{11}S^2) \delta_{0k} \sin(\delta_{0k}S)] \times \\ \times \sin(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left\{ \frac{b_{12}-b_{11}S^2}{1+b_{12}} \cos(\delta_{0k}S) \times \right. \\ \times [-(b_{12} + b_{12}^2 - b_{11}b_{23})S^2 + b_{23}] \delta_{0k}^2 \rho \cos(\delta_{0k}S\rho) - \\ \left. - \frac{(b_{12}+b_{12}^2-b_{11}b_{23})S^2+b_{23}}{S} \delta_{0k} \rho \sin(\delta_{0k}S\rho) \right\} +$$

$$+ \delta_{0k} \frac{(b_{23}+(b_{23}b_{11}-b_{12}-b_{12}^2)S^2)}{1+b_{12}} \times \\ \times [2b_{11}S \cos(\delta_{0k}S) + (b_{12} - b_{11}S^2) \delta_{0k} \sin(\delta_{0k}S)] \times \\ \times \sin(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta).$$

$$\text{В (21)} \delta_{0k} \text{ являются решениями уравнения} \\ \sin(2\delta_{0k}S) - 2\delta_{0k}S = 0; \quad (22)$$

$$\text{б) } u_{\rho} = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \{ -2b_{11}S^2 \sin(\delta_{0k}S) \sin(\delta_{0k}S\rho) + \\ + (b_{12} - b_{11}S^2) \delta_{0k} S [\cos(\delta_{0k}S) \sin(\delta_{0k}S\rho) - \\ - \rho \sin(\delta_{0k}S) \cos(\delta_{0k}S\rho)] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta), \\ u_{\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left\{ \frac{(1+b_{11}S^2)(b_{12}-b_{11}S^2)}{1+b_{12}} \times \right. \\ \times [\cos(\delta_{0k}S\rho) \cos(\delta_{0k}S) + \sin(\delta_{0k}S) \sin(\delta_{0k}S\rho)] - \\ \left. - \frac{b_{11}S^4 + (b_{12}b_{11} + 3b_{11})S^2 - b_{12}}{(1+b_{12})\delta_{0k}S} \times \right. \quad (23) \\ \times \sin(\delta_{0k}S) \cos(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \frac{(b_{12}-b_{11}S^2)^2 \delta_{0k}}{(1+b_{12})S} \times$$

$$\times \{ [S\delta_{0k} \cos(\delta_{0k}S) + \sin(\delta_{0k}S)] \cos(\delta_{0k}S\rho) + \\ + \rho \delta_{0k} S \sin(\delta_{0k}S) \sin(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \varepsilon \frac{(b_{12}-b_{11}S^2) \delta_{0k} S}{1+b_{12}} [\cos(\delta_{0k}S) \sin(\delta_{0k}S\rho) - \\ - \rho \sin(\delta_{0k}S) \cos(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \times \left\{ - \frac{(b_{12}-b_{11}S^2)}{1+b_{12}} \sin(\delta_{0k}S) \times \right. \\ \times [(b_{22} - (b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{22})S^2) \delta_{0k}^2 \rho \sin(\delta_{0k}S\rho) +$$

$$+ \frac{(b_{12}+b_{12}^2-b_{11}b_{22})S^2+b_{22}}{S} \delta_{0k} \cos(\delta_{0k}S\rho)] +$$

$$+ \delta_{0k} \frac{b_{22}-(b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{22})S^2}{(1+b_{12})} \times \\ \times [2b_{11}S \sin(\delta_{0k}S) - (b_{12} - b_{11}S^2) \delta_{0k} \cos(\delta_{0k}S\rho)] \times \\ \times \cos(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left\{ - \frac{(b_{12}-b_{11}S^2)}{1+b_{12}} \sin(\delta_{0k}S) [(b_{23} -$$

$$-(b_{12}^2 + b_{12} - b_{11}b_{23})S^2) \delta_{0k}^2 \rho \sin(\delta_{0k}S\rho) + \\ + \frac{(b_{12}+b_{12}^2-b_{11}b_{23})S^2+b_{23}}{S} \delta_{0k} \cos(\delta_{0k}S\rho)] +$$

$$+ \frac{b_{23}-(b_{12}^2+b_{12}-b_{11}b_{23})S^2}{1+b_{12}} \times \\ \times [2b_{11}S \sin(\delta_{0k}S) - (b_{12} - b_{11}S^2) \delta_{0k} \cos(\delta_{0k}S)] \times \\ \times \cos(\delta_{0k}S\rho) + O(\varepsilon) \} m_k(\theta).$$

$$\text{В (23)} \delta_{0k} \text{ являются решениями уравнения} \\ \sin(2\delta_{0k}S) + 2\delta_{0k}S = 0. \quad (24)$$

В случае 3 ( $e_1 < 0$ ,  $e_1^2 - e_2 \neq 0$ ) асимптотические формулы для перемещений и напряжений получаются из (17)–(20) заменой  $S_1$ ,  $S_2$  на  $iS_1$ ,  $iS_2$ .

В случае 4 ( $e_1 < 0$ ,  $e_1^2 = e_2$ ) результаты получаются из (21)–(24) заменой  $S$  на  $iS$ .

Уравнения (18), (20), (22), (24) совпадают с уравнениями, определяющими показатели краевых эффектов Сен-Венана в теории трансверсально-изотропных плит [10].

В случае  $z_k = O(\varepsilon^{-1})$  главный член асимптотического решения (7) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  принимает вид [9]

$$m_k(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}} \exp \left[ -\varepsilon^{-1} \sqrt{-\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] \times \\ \times \left[ \exp \left( \frac{-\delta_{0k} \delta_{1k}}{\sqrt{-\delta_{0k}^2}} (\theta - \theta_1) \right) + O(\varepsilon) \right] \\ \text{в окрестности } \theta = \theta_1, \\ \frac{1}{\sqrt[4]{-\delta_{0k}^2}} \exp \left[ \varepsilon^{-1} \sqrt{-\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] \times \\ \times \left[ \exp \left( \frac{-\delta_{0k} \delta_{1k}}{\sqrt{-\delta_{0k}^2}} (\theta - \theta_2) \right) + O(\varepsilon) \right] \\ \text{в окрестности } \theta = \theta_2. \end{cases}$$

Решения, соответствующие третьей группе спектральных параметров, имеют характер пограничного слоя и локализованы у конических сечений  $\theta = \theta_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Для действительных  $\delta_{0k}$  пограничные решения затухают весьма слабо. Их следует причислить к проникающим решениям. Когда  $\delta_{0k}$  – чисто мни-

мые или комплексные, общая картина напряженно-деформированного состояния в качественном отношении аналогична соответствующей картине для изотропных сферических оболочек [6–8].

В [11] выполнены исследования корней уравнений (18), (20), (22), (24).

### Высокочастотные колебания трансверсально-изотропного сферического слоя малой толщины

Изучим высокочастотные колебания, т.е. рассмотрим случай  $\lambda \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Здесь возможны следующие предельные варианты:

- $\lambda\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- $\lambda\varepsilon \rightarrow \text{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
- $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Спектральные параметры  $z_k \rightarrow \infty$ , когда  $\lambda \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

а) допустим  $\lambda\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . В этом случае краевая задача (8) имеет две группы спектральных параметров:

1<sup>0</sup>. Первая группа спектральных параметров состоит из двух  $z_k = O(\varepsilon^{-\gamma})$ , если  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{-\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$ , или из четырех  $z_k = O(\varepsilon^{-\gamma})$ , если  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{1-2\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$ .

2<sup>0</sup>. Вторая группа состоит из счетного множества спектральных параметров  $z_k$ , которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Предполагаем, что главные члены асимптотики  $z_k$  и  $\lambda$  имеют вид  $z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\gamma}$ ,  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{-\beta}$ , где  $z_{k0} = O(1)$ ,  $\lambda_0 = O(1)$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ .

Легко доказывается, что  $\beta \leq \gamma$ . При  $\beta = \gamma$  имеем

$$z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\gamma} + z_{k1} \varepsilon^{\gamma} + \dots, \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \quad (25)$$

$$z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\gamma} + z_{k1} \varepsilon^{2-3\gamma} + \dots, \quad \frac{1}{2} \leq \gamma < 1,$$

где  $z_{k0}^2 = \frac{2(1+\nu)(1-\nu_1\nu_2)}{E_0 G_0} \lambda_0^2$ ,  $G_0 = G G_1^{-1}$ ,  $\nu_2 = \nu_1 E_0^{-1}$ ,  $E_0 = E_1 E^{-1}$  и  $\nu, \nu_1, E, E_1$  – технические константы материала.

При  $\beta < \gamma$  находим, что  $\beta = 2\gamma - 1$  и  $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ .

Задавая  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{1-2\gamma}$ , для  $z_k$  получаем

$$z_k = \varepsilon^{-\gamma} (z_{k0} + \varepsilon^{4\gamma-2} z_{k1} + \dots), \quad \frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}, \quad (26)$$

$$z_k = \varepsilon^{-\gamma} (z_{k0} + \varepsilon^{2-2\gamma} z_{k1} + \dots), \quad \frac{2}{3} \leq \gamma < 1,$$

где  $z_{k0}^4 = \frac{6(1+\nu)(1-\nu_1\nu_2)}{E_0 G_0} \lambda_0^2$ .

Асимптотические представления для перемещений и напряжений, соответствующие (25), имеют вид

$$u_\rho = O(\varepsilon^{2\gamma}), u_\theta = O(\varepsilon), \quad \sigma_{\theta\theta} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}), \sigma_{\phi\phi} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}), \quad (27)$$

$$\sigma_{\rho\rho} = O(\varepsilon^{2-3\gamma}), \sigma_{\rho\theta} = O(\varepsilon^{3-4\gamma})$$

для  $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ ;

$$u_\rho = O(\varepsilon^{2-2\gamma}), u_\theta = O(\varepsilon), \sigma_{\theta\theta} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}), \sigma_{\phi\phi} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}), \sigma_{\rho\rho} = O(\varepsilon^{2-3\gamma}), \sigma_{\rho\theta} = O(\varepsilon^{3-4\gamma})$$

для  $\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$ .

Асимптотические формулы для перемещений и напряжений, соответствующие (26), принимают вид

$$u_\rho = -\sum_{k=1}^4 C_k (z_{k0}^2 + O(\varepsilon^{4\gamma-2})) m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^4 C_k \varepsilon (z_{k0}^2 \rho + O(\varepsilon^{4\gamma-2})) m'_k(\theta), \quad (28)$$

для  $\frac{1}{2} < \gamma < \frac{2}{3}$ ;

$$u_\rho = -\sum_{k=1}^4 C_k (z_{k0}^2 + O(\varepsilon^{2-2\gamma})) m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^4 C_k \varepsilon (z_{k0}^2 \rho + O(\varepsilon^{2-2\gamma})) m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}), \sigma_{\phi\phi} = O(\varepsilon^{1-2\gamma}),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = O(\varepsilon^{4-4\gamma}), \sigma_{\rho\theta} = O(\varepsilon^{3-4\gamma})$$

для  $\frac{2}{3} < \gamma < 1$ .

В случае  $\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{-\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ , определим такие  $z_k \rightarrow \infty$ , которые имеют порядок  $O(\varepsilon^{-1})$ :

$$z_k = \frac{\delta_{ok}}{\varepsilon} + O(\varepsilon^{1-2\beta}).$$

В первом члене асимптотики получаем спектральные параметры, определяемые формулами (18), (20), (22), (24). Решения (17), (19), (21), (23) остаются в силе;

б) допустим  $\lambda\varepsilon \rightarrow \text{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Краевая задача (8) в случае  $\lambda\varepsilon \rightarrow \text{const}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет счетное множество спектральных параметров  $z_k$ , порядок которых  $O(\varepsilon^{-1})$ .

Для  $\lambda = \frac{p}{\varepsilon}$  решение (8) ищем в виде (15). Первые члены разложения удовлетворяют соотношениям

$$(\mathbf{L}_0 + p^2 \mathbf{E} - \delta_0^2 \mathbf{L}_1) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad (29)$$

$$(\mathbf{M}_0 - \delta_0^2 \mathbf{M}_1) \mathbf{u}_0|_{\rho=\pm 1} = \mathbf{0},$$

где  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_0 = (a_0, c_0)^T$ .

Характеристическое уравнение (29) принимает вид  $\alpha^4 + 2g_1 \alpha^2 + g_2 = 0$ , где

$$2g_1 = 2e_1 \delta_0^2 + (1 + b_{11}) b_{11}^{-1} p^2,$$

$$g_2 = e_2 \delta_0^4 + [p^4 - (1 + b_{22}) \delta_0^2 p^2] b_{11}^{-1}.$$

Существуют следующие возможные случаи:

$$1. g_1 > 0, g_1^2 - g_2 \neq 0.$$

$$\alpha_{1,2} = \pm i d_1; \alpha_{3,4} = \pm i d_2;$$

$$d_n = \sqrt{g_1 + (-1)^{n+1} \sqrt{g_1^2 - g_2}}, \quad n = 1, 2;$$

а)  $d_1, d_2$  – вещественные и различные, если  $g_1^2 - g_2 > 0$ ;

б)  $d_1$  и  $d_2$  – комплексные, если  $g_1^2 - g_2 < 0$ .

$$2. g_1 > 0, g_1^2 = g_2,$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm i q, \quad \text{где } q = \sqrt{g_1}.$$

$$3. g_1 < 0, g_1^2 - g_2 \neq 0,$$

$$\alpha_{1,2} = \pm d_1, \alpha_{3,4} = \pm d_2,$$

$$d_n = \sqrt{|g_1| + (-1)^{n+1} \sqrt{g_1^2 - g_2}}, n = 1, 2:$$

а)  $d_1$  и  $d_2$  – вещественные и различные, если  $g_1^2 - g_2 > 0$ ;

б)  $d_1$  и  $d_2$  – комплексные, если  $g_1^2 - g_2 < 0$ .

$$4. g_1 < 0, g_1^2 = g_2,$$

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \pm q, \text{ где } q = \sqrt{|g_1|}.$$

В случае 1 ( $g_1 > 0, g_1^2 - g_2 \neq 0$ ) для перемещений и напряжений получаем

$$1^0. u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} F_k (1 + b_{12}) d_{1k} d_{2k} \delta_{0k}^2 \times [x_{k2} \cos d_{2k} \cos(d_{1k} \rho) - x_{k1} \cos d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \quad (30)$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} F_k [d_{1k} y_{k2} x_{k1} \cos d_{1k} \sin(d_{2k} \rho) - d_{2k} y_{k1} x_{k2} \cos d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 [d_{2k} x_{k2} q_{k1} \cos d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) - d_{1k} x_{k1} q_{k2} \sin(d_{2k} \rho) \cos d_{1k} + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} F_k d_{1k} d_{2k} x_{k1} x_{k2} [\cos d_{2k} \cos(d_{1k} \rho) - \cos d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 \{ [d_{2k} x_{k2} \times (b_{22} y_{k1} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{1k}^2) \times \cos d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) - d_{1k} x_{k1} \times (b_{12}(1 + b_{12}) d_{2k}^2 - b_{22} y_{k2}) \times \cos d_{1k} \sin(d_{2k} \rho)] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 \{ [d_{2k} x_{k2} \times (b_{23} y_{k1} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{1k}^2) \cos d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) - d_{1k} x_{k1} (b_{12}(1 + b_{12}) d_{2k}^2 - b_{23} y_{k2}) \times \cos d_{1k} \sin(d_{2k} \rho)] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \}.$$

Здесь  $\delta_{0k}^2$  являются решениями уравнения

$$d_{1k} x_{k1} q_{k2} \sin d_{2k} \cos d_{1k} - d_{2k} x_{k2} q_{k1} \sin d_{1k} \cos d_{2k} = 0, \quad (31)$$

$$\text{где } x_{ki} = \delta_{0k}^2 b_{12} - b_{11} d_{ik}^2 + p^2;$$

$$q_{ki} = b_{12} (\delta_{0k}^2 - p^2) - b_{11} d_{ik}^2;$$

$$y_{ki} = b_{11} d_{ik}^2 - p^2 + \delta_{0k}^2, i=1, 2.$$

$$2^0. u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} F_k (1 + b_{12}) \delta_{0k}^2 d_{1k} d_{2k} \times [x_{k2} \sin d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) - x_{k1} \sin d_{1k} \sin(d_{2k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} F_k [d_{2k} y_{k1} x_{k2} \sin d_{2k} \cos(d_{1k} \rho) - d_{1k} y_{k2} x_{k1} \sin d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 [d_{1k} q_{k2} x_{k1} \sin d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) - d_{2k} x_{k2} q_{k1} \sin d_{2k} \cos(d_{1k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \quad (32)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} F_k d_{1k} d_{2k} [x_{k1} x_{k2} (\sin d_{2k} \sin(d_{1k} \rho) - \sin d_{1k} \sin(d_{2k} \rho)) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 \{ [d_{1k} x_{k1} \times (b_{22} y_{k2} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{2k}^2) \sin d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) - d_{2k} x_{k2} (b_{22} y_{k1} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{1k}^2) \times \sin d_{2k} \cos(d_{1k} \rho)] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta_{0k}^2 \{ [d_{1k} x_{k1} \times (b_{23} y_{k2} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{2k}^2) \sin d_{1k} \cos(d_{2k} \rho) - d_{2k} x_{k2} (b_{23} y_{k1} - b_{12}(1 + b_{12}) d_{1k}^2) \times \sin d_{2k} \cos(d_{1k} \rho)] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \}.$$

В (32)  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения

$$d_{1k} q_{k2} x_{k1} \cos d_{2k} \sin d_{1k} - d_{2k} q_{k1} x_{k2} \cos d_{1k} \sin d_{2k} = 0. \quad (33)$$

В случае 2 ( $g_1 > 0, g_1^2 = g_2$ ) для перемещений и напряжений имеем:

$$1^0. u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} H_k [(2sb_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) \cos(q_k \rho) - h_{1k} h_{3k} \rho \cos q_k \sin(q_k \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ (2q_k b_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) \times h_{4k} \sin(q_k \rho) - h_{3k} \delta_{0k}^2 (1 + b_{12}) \cos q_k \times [(2b_{11} h_{1k} + b_{12} + 1) \sin(q_k \rho) - (1 + b_{12}) q_k \rho \cos(q_k \rho)] + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = - \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ (2q_k b_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) \times h_{6k} \sin(q_k \rho) + h_{3k} \delta_{0k}^2 (1 + b_{12}) \cos q_k \times [(h_{1k} b_{11} (1 - b_{12}) + b_{12} (1 + b_{12})) \delta_{0k}^2 \sin(q_k \rho) + (\delta_{0k}^2 b_{12} (1 + b_{12}) + b_{11} h_{1k} \delta_{0k}^2 (1 + b_{12})) q_k \rho \cos(q_k \rho)] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_k \delta_{0k}^2 (1 + b_{12}) \times \{ (2q_k b_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) h_{3k} \cos(q_k \rho) - h_{3k} \cos q_k (h_{2k} \rho \sin(q_k \rho) + 2q_k b_{11} h_{1k} \cos(q_k \rho)) + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = - \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ [(2q_k b_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) \times (q_k b_{12} + b_{22} \delta_{0k}^2 h_{4k}) \sin(q_k \rho) + h_{3k} \delta_{0k}^4 (1 + b_{12}) \times \cos q_k ((b_{12} h_{1k} (1 + b_{12}) - b_{22} (1 + b_{12} + 2h_{1k} b_{11})) \times \sin(q_k \rho) + (1 + b_{12}) (b_{22} + h_{1k} b_{12}) q_k \rho \cos(q_k \rho))] \times m_k(\theta) + O(\varepsilon) \},$$

$$\sigma_{\phi\phi} = - \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ [(2q_k b_{11} h_{1k} \cos q_k + h_{2k} \sin q_k) \times (q_k b_{12} + b_{23} \delta_{0k}^2 h_{4k}) \sin(q_k \rho) + h_{3k} \delta_{0k}^4 (1 + b_{12}) \cos q_k \times ((b_{12} h_{1k} (1 + b_{12}) - b_{23} (b_{12} + 2b_{11} h_{1k} + 1)) \times \sin(q_k \rho) + (1 + b_{12}) (b_{23} + h_{1k} b_{12}) q_k \times \rho \cos(q_k \rho))] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \}. \quad (34)$$

В (34)  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения  $(q_k h_{3k}(b_{12} + b_{11} h_{1k}) - h_{2k} h_{5k}) \cos(2q_k) + (2b_{11} q_k h_{1k} h_{5k} + h_{3k} \times$   
 $\times \left( \frac{b_{11}(1-b_{12})}{1+b_{12}} h_{1k} + b_{12} \right)) \sin(2q_k) =$   
 $= -(h_{2k} h_{5k} + q_k h_{3k}(b_{12} + b_{11} h_{1k}));$  (35)

$$h_{1k} = \frac{p^2 - \delta_{0k}^2 b_{22} - q_k^2}{\delta_{0k}^2 (1+b_{12})}; h_{2k} = p^2 - \delta_{0k}^2 b_{22} + b_{12} q_k^2;$$

$$h_{3k} = p^2 + \delta_{0k}^2 b_{12} - b_{11} q_k^2; h_{4k} = \frac{p^2 - \delta_{0k}^2 - b_{11} q_k^2}{\delta_{0k}^2 q_k (1+b_{12})};$$

$$h_{5k} = \frac{b_{11} q_k^2 + b_{12} (p^2 - \delta_{0k}^2)}{q_k (1+b_{12})}.$$

$$2^0. u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} H_k [h_{1k} h_{3k} \rho \sin q_k \cos(q_k \rho) + (2b_{11} q_k h_{1k} \sin q_k - h_{2k} \cos q_k) \sin(q_k \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \left\{ \frac{h_{3k}}{\delta_{0k}^2 (1+b_{12})} \sin q_k \times \right.$$
 (36)

$$\times [(1 + b_{12}) q_k \rho \sin(q_k \rho) + (2b_{11} h_{1k} + 1 + b_{12}) \times \cos(q_k \rho)] - h_{4k} [2b_{11} h_{1k} q_k \sin q_k - h_{2k} \cos q_k] \times \cos(q_k \rho) + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \left\{ h_{3k} \left[ \left( \frac{b_{11}(1-b_{12})h_{1k}}{1+b_{12}} + b_{12} \right) \sin q_k \times \cos(q_k \rho) - (b_{11} h_{1k} + b_{12}) q_k \rho \sin(q_k \rho) \right] + h_{5k} \cos(q_k \rho) [2b_{11} h_{1k} q_k \cdot \sin q_k - h_{2k} \cos q_k] + O(\varepsilon) \} m_k(\theta),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_k \left\{ \frac{h_{3k}}{\delta_{0k}^2 (1+b_{12})} \times [h_{2k} \rho \cos(q_k \rho) - 2b_{11} h_{1k} q_k \sin(q_k \rho)] \sin q_k + [2b_{11} h_{1k} q_k \sin q_k + h_{2k} \cos q_k] \sin(q_k \rho) + O(\varepsilon) \} m'_k(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ [h_{3k} \sin q_k (b_{12} h_{1k} \times \cos(q_k \rho) - q_k \rho \sin(q_k \rho)) - b_{22} (q_k \rho \sin(q_k \rho) + \left( \frac{2b_{11} h_{1k}}{1+b_{12}} + 1 \right) \cos(q_k \rho))] +$$

$$+ (2b_{11} h_{1k} q_k \sin q_k - h_{2k} \cos q_k) \times (q_k b_{12} + h_{4k} \delta_{0k}^2 b_{22}) \cos(q_k \rho) \} m_k(\theta) + O(\varepsilon),$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \{ [h_{1k} h_{3k} b_{12} (\cos(q_k \rho) - q_k \rho \sin(q_k \rho)) - \delta_{0k}^2 b_{23} ((1 + b_{12}) q_k \rho \sin(q_k \rho) + (2b_{11} h_{1k} + b_{12} + 1) \cos(q_k \rho) + (2b_{11} h_{1k} q_k \cdot \sin q_k - h_{2k} \cos q_k) \times (q_k b_{12} + b_{23} h_{4k} \delta_{0k}^2) \cos(q_k \rho))] m_k(\theta) + O(\varepsilon) \}.$$

В (36)  $\delta_{0k}$  являются решениями уравнения  $(q_k h_{3k}(b_{12} + b_{11} h_{1k}) - h_{2k} h_{5k}) \cos(2q_k) + (2b_{11} q_k h_{1k} h_{5k} + \left( \frac{b_{11}(1-b_{12})}{1+b_{12}} h_{1k} + b_{12} \right) h_{3k}) \sin(2q_k) = h_{2k} h_{5k} + q_k h_{3k}(b_{11} h_{1k} + b_{12}).$  (37)

В случае 3 ( $g_1 < 0, g_1^2 - g_2 \neq 0$ ) асимптотические выражения для перемещений и напряжений получаются из (30)–(33) заменой  $d_{1k}, d_{2k}$  на  $id_{1k}, id_{2k}$ .

В случае 4 ( $g_1 < 0, g_1^2 = g_2$ ) результаты получаются из (34)–(37) заменой  $q_k$  и  $iq_k$ .

Уравнения (31), (33) в изотропном случае переходят в уравнение Рэлея – Лэмба [2, 8, 12];

в) допустим  $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Краевая задача (8) в этом случае имеет счетное множество спектральных параметров  $z_k$ , порядок которых  $O(\varepsilon^{-\gamma})$ ,  $\gamma \geq 1$ .

В случае  $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  уравнения (31), (33) остаются в силе.

Решения, соответствующие случаям  $\lambda\varepsilon \rightarrow \text{const}$ ,  $\lambda\varepsilon \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в прикладной теории оболочек отсутствуют.

### Удовлетворение граничных условий на торцах сферы

Перемещения представим в виде

$$u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} D_k a_k(\rho) m_k(\theta) e^{i\lambda\rho},$$

$$u_\theta = \sum_{k=1}^{\infty} D_k c_k(\rho) m'_k(\theta) e^{i\lambda\rho}. \quad (38)$$

Для напряжений имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (\sigma_{1k}^{(1)}(\rho) m_k(\theta) + \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) m'_k(\theta) \text{ctg}\theta) e^{i\lambda\rho},$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sigma_{2k}(\rho) m'_k(\theta) e^{i\lambda\rho}, \quad (39)$$

где

$$\sigma_{1k}^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} [b_{12} a'_k(\rho) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} ((b_{22} + b_{23}) a_k(\rho) - b_{22} (z_k^2 - \frac{1}{4}) c_k(\rho))],$$

$$\sigma_{1k}^{(2)}(\rho) = \frac{(b_{23} - b_{22})}{1+\varepsilon\rho} c_k(\rho), \sigma_{2k}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} [c'_k(\rho) + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\rho} (a_k(\rho) - c_k(\rho))].$$

Для определения неизвестных констант  $D_k$  воспользуемся вариационным принципом Гамильтона [3]. Поскольку решения (38) удовлетворяют уравнениям движения (3) и однородным граничным условиям (4) на боковой поверхности, с учетом (5) из вариационного принципа получаем

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\theta\theta} - f_{1j}) \delta u_\theta + (\sigma_{\rho\theta} - f_{2j}) \delta u_\rho] \Big|_{\theta=\theta_j} (1 + \varepsilon\rho) d\rho = 0. \quad (40)$$

Подставим (38), (39) в (40). Считая  $\delta D_k$  независимыми вариациями, для определения  $D_k$  получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} D_k = W_{0j}, j = 1, 2, \dots, \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
& \text{где } F_{jk} = \\
& = \int_{-1}^1 \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) c_j(\rho) (1 + \varepsilon \rho) d\rho \left( \sum_{s=1}^2 m_k(\theta_s) m'_j(\theta_s) \right) + \\
& + \int_{-1}^1 \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) c_j(\rho) (1 + \varepsilon \rho) d\rho \times \\
& \times \left( \sum_{s=1}^2 m_k(\theta_s) m'_j(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s \right) + \\
& + \int_{-1}^1 \sigma_{2k}(\rho) a_j(\rho) (1 + \varepsilon \rho) d\rho \left( \sum_{s=1}^2 m'_k(\theta_s) m_j(\theta_s) \right), \\
W_{0j} = \\
& = \sum_{s=1}^2 [m'_j(\theta_s) \int_{-1}^1 f_{1s}(\rho) c_j(\rho) (1 + \varepsilon \rho) d\rho + m_j(\theta_s) \times \\
& \times \int_{-1}^1 f_{2s}(\rho) a_j(\rho) (1 + \varepsilon \rho) d\rho].
\end{aligned}$$

Если в (41) подставить асимптотические выражения (10), (13), (17), (19), (21), (23), (27), (28), (30), (32), (34), (36) для  $u_\rho, u_\theta, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\rho\theta}$ , соответствующие различным группам спектрального параметра  $z$ , и использовать малость параметра  $\varepsilon$ , то можно построить асимптотическое решение системы (41).

В случаях  $\lambda = O(1)$ ,  $\lambda = O(\varepsilon^{-\gamma})$ ,  $\lambda = O(\varepsilon^{1-2\gamma})$ ,  $0 < \gamma < 1$ , системы (41) фактически совпадают с бесконечными системами, полученными в [7]. В случае  $\lambda = O(\varepsilon^{-\gamma})$ ,  $\gamma \geq 1$ , получаем бесконечную систему, связанную с динамической задачей теории упругости для упругой полосы [8, 12].

Условия разрешимости и сходимости метода редукции для (41) следуют из результатов работы [13, 14].

Решение динамических краевых задач теории упругости в общем случае, как и в статике, сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство, которое усложняет решение бесконечных систем (41) методом урезания. Дело в том, что, как видно из выражения для компонент вектора перемещения и тензора напряжений, их амплитудные характеристики сложным образом зависят от параметра частоты. Физическая сущность рассматриваемого явления здесь такова, что при некоторых значениях частоты амплитуды напряжений и смещений и, естественно, неизвестные, определяемые из бесконечных систем, должны становиться бесконечно большими. Это обстоятельство приводит к тому, что обычные методы решения бесконечных систем, опирающихся на предварительное доказательство их регулярности, напрямую неприменимы при анализе бесконечных систем (41), поскольку с самого начала очевидна невозможность получения оценок регулярности, равномерных относительно частоты колебаний.

#### Литература

1. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек //

Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета пластин и оболочек. Тбилиси, 1975. С. 51–150.

2. Mekhtiev M.F. Asymptotic Analysis of Spatial Problems in Elasticity. Springer, 2019. 241 p.

3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.

4. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропно-го тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции : в 3 т. : пер. с англ. М.: Наука, 1965. Т. 1. 296 с.

6. Лурье А.И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки // Прикладная математика и механика. 1943. Т. VII, вып. 6. С. 393–404.

7. Виленская Т.В., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 2. С. 278–295.

8. Mekhtiev M.F. Vibrations of Hollow Elastic Bodies. Springer, 2018. 212 p.

9. Akhmedov N.K., Sofiyev A.H. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres // Thin-Walled Structures. 2019. Vol. 139. P. 232–241.

10. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наукова думка, 1978. 239 с.

11. Лидский В.Б., Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб. 1968. Вып. 4. С. 556–566.

12. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.

13. Устинов Ю.А. Математическая теория попеременно-неоднородных плит. Ростов н/Д.: ЦВВР, 2006. 257 с.

14. Устинов Ю.А., Юдович В.И. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 4. С. 706–714.

#### References

1. Vorovich I.I. (1975). Some results and problems of the asymptotic theory of plates and shells. *Materialy I Vsesoyuznoi shkoly po teorii i chislennym metodam rascheta plastin i obolochek* [Materials of the I all-Union school on the theory and numerical methods of calculating plates and shells]. Tbilisi, pp. 51-150. (in Russian).

2. Mekhtiev M.F. (2019). *Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity*. Springer, 241 p.

3. Lurie A.I. (1970). *Theory of elasticity*. Moscow, Nauka Publ., 939 p. (in Russian).



4. Lehnitsky S.G. (1977). *Theory of elasticity of an anisotropic body*. Moscow, Nauka Publ., 415 p. (in Russian).
5. Bateman G., Erdelyi A. (1965). *Higher transcendental functions*: in 3 vols. Trans. with English. Moscow, Nauka Publ., vol. 1, 296 p. (in Russian).
6. Lurie A.I. (1943). Equilibrium of an elastic symmetrically loaded spherical shell. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. VII, no. 6, pp. 393-404. (in Russian).
7. Vilenskaya T.V., Vorovich I.I. (1966). Asymptotic behavior of the solution of the problem of elasticity theory for a spherical shell of small thickness. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 30, no. 2, pp. 278-295. (in Russian).
8. Mekhtiev M.F. (2018). *Vibrations of hollow elastic bodies*. Springer, 212 p.
9. Akhmedov N.K., Sofiyev A.H. (2019). Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres. *Thin-Walled Structures*, vol. 139, pp. 232-241.
10. Kosmodamiansky A.S., Shaldyrvan V.A. (1978). *Thick multi-connected plates*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 239 p. (in Russian).
11. Lidsky V.B., Sadovnichy V.A. (1968). Asymptotic formulas for roots of one class of integer functions. *Mat. sb.*, iss. 4, pp. 556-566. (in Russian).
12. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. (1981). *Harmonic vibrations and waves in elastic bodies*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 283 p. (in Russian).
13. Ustinov Yu.A. (2006). *Mathematical theory of transversely inhomogeneous plates*. Rostov-on-Don, TsVVR Publ., 257 p. (in Russian).
14. Ustinov Yu.A., Yudovich V.I. (1973). On the completeness of the system of elementary solutions of the biharmonic equation in a half-band. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 37, no. 4, pp. 706-714. (in Russian).

---

*Поступила в редакцию / Received*

*3 апреля 2020 г. / April 3, 2020*

УДК 539.3

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-72-83

## О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

© 2020 г. С.М. Мхитарян<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Армения,<sup>2</sup>Национальный университет архитектуры и строительства Армении, Ереван, Армения

## ON THE APPLICATION OF THE METHOD OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS TO SOLVING PROBLEMS FOR AN ELASTIC PLANE WITH A COLLINEAR SYSTEM OF CRACKS

S.M. Mkhitarian<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia,<sup>2</sup>National University of Architecture and Construction of Armenia, Yerevan, Armenia

Мхитарян Сурен Манукович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент НАН Армении, профессор, заведующий отделом механики упругих и вязкоупругих тел, Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, пр. Маршала Баграмяна, 24б, г. Ереван, 0019, Республика Армения; заведующий кафедрой высшей математики, Национальный университет архитектуры и строительства Армении, ул. Теряна, 105, г. Ереван, 0009, Республика Армения, e-mail: smkhitarian39@rambler.ru

Suren M. Mkhitarian - Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member, National Academy of Sciences of Armenia, Professor, Head of the Department of Mechanics of Elastic and Viscoelastic Bodies, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Marshal Bagratyan Ave., 24b, Yerevan, 0019, Republic of Armenia; Head of the Department of Higher Mathematics, National University of Architecture and Construction of Armenia, Teryan St., 105, Yerevan, 0009, Republic of Armenia, e-mail: smkhitarian39@rambler.ru

Методом гиперсингулярных интегральных уравнений строится точное, в квадратурах решение классических задач механики упругой плоскости с коллинеарной системой трещин. При этом упругая плоскость находится в состоянии антиплоской или плоской деформации, а берега трещины в случае антиплоской деформации нагружены касательными силами симметрически, а в случае плоской деформации – нормальными силами опять-таки симметрически. Формулируются эквивалентные этим задачам смешанные граничные задачи для упругой полуплоскости. При плоской деформации обсуждается также смешанная граничная задача для упругой полуплоскости, когда ее граница усилена двумя одинаковыми и симметрически расположенными полубесконечными стрингерами, а между ними находится система из произвольного конечного числа стрингеров. Считается, что стрингеры абсолютно жестки на растяжение-сжатие и абсолютно гибки на изгиб. Более подробно рассматривается частный случай двух одинаковых симметрично расположенных трещин. В этом случае точное решение задачи строится также методом ортогональных многочленов Чебышева.

**Ключевые слова:** упругая плоскость, коллинеарная система трещин, смешанная граничная задача, напряжения, перемещения, гиперсингулярное интегральное уравнение.

In the present paper, using the method of hypersingular integral equations, based on the formulas of the inversion of the corresponding singular integral equations, the exact quadrature solution of the classical problems of the mechanics of an elastic plane with a collinear system of cracks is constructed. The elastic plane is in a state of antiplane deformation or plane deformation; in case of antiplane deformation, crack edges are symmetrically loaded by tangential forces, while in case of plane deformation, they are again loaded symmetrically but by normal forces. Mixed boundary-value problems for an elastic half-plane equivalent to these problems are formulated. Under plane deformation, the mixed boundary-value problem for an elastic half-plane is discussed as well when the plane boundary is reinforced by two similar and symmetrically located semi-infinite stringers between which a system of an arbitrarily final number of stringers is situated. It is considered that the stringers are absolutely rigid for expansion and compression and absolutely flexible for bending. A particular case of two

similar symmetrically located cracks is considered more in detail. In this case, the exact solution to the problem is also constructed by the method of Chebyshev orthogonal polynomials.

**Keywords:** elastic plane, collinear system of cracks, mixed boundary-value problem, stresses, displacements, hypersingular integral equation.

## Введение

Вслед за теорией сингулярных интегральных уравнений (СИУ) и связанных с ней методов краевых задач аналитических функций в последние десятилетия интенсивно развиваются исследования по теории гиперсингулярных интегральных уравнений (ГСИУ) и методам вычисления гиперсингулярных интегралов в смысле Адамара. ГСИУ находят многочисленные приложения в задачах механики разрушения, геомеханики, гидромеханики, акустики, в теории теплопроводности тел, теории потенциала, в разнообразных областях математической физики и прикладной математики [1–5]. ГСИУ в идейном и методологическом аспектах тесно связаны с СИУ и теорией краевых задач аналитических функций, которые широко используются в исследованиях по контактному и смешанному задачам теории упругости и механики разрушения [6–11].

Из часто встречающихся в приложениях ГСИУ наиболее глубоко как в теоретическом, так и в вычислительном плане разработана теория классического ГСИУ с ядром  $(s-x)^{-2}$  на одном интервале, допускающего точное решение [12, 13]. Это же ГСИУ на двух симметрических интервалах рассмотрено в [14], где решение представлено сложным двукратным интегралом с внутренним сингулярным интегралом от ядра Коши. Класс точно решаемых ГСИУ расширен в [15], где рассмотрены гиперсингулярные ядра, представляющие аналоги ядра Гильберта и родственные с ним.

В настоящей статье, следуя методике работы [15], на основании формулы обращения классического СИУ с ядром Коши построено в квадратурах точное решение ГСИУ с ядром  $(s-x)^{-2}$  на нескольких интервалах. К нему сводятся простейшие задачи о напряженном состоянии линейно-упругой изотропной плоскости с коллинеарной системой трещин. Предполагается, что упругая плоскость находится в состоянии антиплоской или плоской деформации. Берега трещин нагружены симметрически, соответственно, касательными или нормальными силами. Излагается вывод этого определяющего ГСИУ. Одновременно формулируются эквивалентные задачам о трещинах смешанные граничные задачи для упругой полуплоскости. Входящие в решение ГСИУ интегралы вы-

числяются по квадратурным формулам Гаусса по чебышевским узлам. Более подробно рассматривается частный случай двух симметрично расположенных трещин (интервалов). В этом случае решение ГСИУ разбивается на симметрическую и кососимметрическую части. Они выражаются аналитическими формулами довольно простой структуры. Одновременно методом ортогональных многочленов Чебышева получены точные решения разбираемого ГСИУ для его симметрической и кососимметрической частей. В данном частном случае полученные здесь результаты по сравнению с результатами работы [14] выгодно отличаются своей простотой и компактностью.

## Постановка задач и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим следующие простейшие задачи механики трещин. Пусть отнесенное к правой прямоугольной системе координат  $Oxuz$  линейно-упругое изотропное пространство с модулем сдвига  $G$  в плоскости  $y=0$  содержит систему  $\Omega$  из произвольного конечного числа сквозных (туннельных) бесконечно-ленточных трещин  $\omega_k$ :

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n \omega_k, \quad \omega_k = \{y=0, a_k \leq x \leq b_k, -\infty < z < \infty\}.$$

Пусть далее берега трещин нагружены касательными силами симметрически, т.е. на верхних (+) и нижних (–) берегах трещин действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению касательные силы интенсивности  $\tau(x)$ , не зависящие от координаты  $z$ :  $\tau_{yz}|_{y=\pm 0} = \tau(x)$ ,  $x \in \Omega$ , где  $\tau_{yz}$  – компонента касательных напряжений.

Считается, что под действием таких сил упругое пространство находится в состоянии антиплоской деформации (продольного сдвига) в направлении оси  $Oz$  с базовой плоскостью  $Oxy$ . Тогда единственной отличной от нуля компонентой упругих перемещений будет компонента в направлении оси  $Oz$ :  $u_z = u_z(x, y)$ , которая в каждой из полуплоскостей  $y > 0$  и  $y < 0$  является гармонической функцией.

Ввиду симметрии относительно оси  $Ox$  задача о трещинах математически эквивалентна смешанной граничной задаче теории упругости для нижней полуплоскости  $y < 0$ :

$$\begin{cases} \Delta u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad -\infty < y < 0, \\ \tau_{yz} \Big|_{y=0} = G \frac{\partial u_z}{\partial y} \Big|_{y=0} = \tau(x), \quad x \in L: \quad L = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k], \\ u_z \Big|_{y=0} = 0, \quad x \in L', \quad L' = R/L, \\ \tau_{yz}, \tau_{xz} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Очевидно, что (1) представляет собой смешанную граничную задачу теории двумерных гармонических функций.

Отметим, что мы опять приходим к граничной задаче (1), если рассмотрим задачу о системе трещин  $L$  на горизонтальной оси  $Ox$  в кусочно-однородной плоскости  $Oxy$ , считая, что верхняя полуплоскость  $y > 0$  абсолютно жесткая и касательными силами нагружены только нижние берега трещин.

В граничной задаче (1) требуется определить перемещения на системе отрезков  $L$ , т.е. функцию  $f(x) = u_z(x, y) \Big|_{y=0}, \quad x \in L$ .

Предполагается, что  $f(x)$  непрерывна на  $L$  и обладает производной, удовлетворяющей на  $L$  условию Гёльдера с некоторым показателем  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , т.е.  $f(x) \in C^{1,\alpha}(L)$ . Вследствие непрерывности эта функция должна удовлетворять условиям

$$f(a_k) = f(b_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Раскрытие трещин и плотности дислокаций на берегах определяются, соответственно, формулами  $\Delta(x) = -2f(x), \quad \Delta'(x) = -2f'(x), \quad x \in L$ .

Коэффициенты интенсивности напряжений и разрушающие напряжения вне системы трещин  $L$  на оси  $Ox$  находятся по формулам из [10].

Отметим, что смешанную граничную задачу (1) можно интерпретировать также следующим образом: каков должен быть режим перемещений  $f(x)$  при антиплоской деформации на системе  $L$  незаземленных отрезков границы нижней упругой полуплоскости  $y < 0$ , чтобы на них могли действовать наперед заданные касательные силы интенсивности  $\tau(x)$ .

Приступив к определению функции  $f(x)$ , обратимся к представлению в виде интеграла Пуассона для нижней полуплоскости  $y \leq 0$  [16, с. 224, ф-ла (5)]

$$u_z(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(s) ds}{(s-x)^2 + y^2}, \quad (3)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad y < 0,$$

где  $u(x) = \begin{cases} f(x), & x \in L, \\ 0, & x \in L'. \end{cases}$

Исходя из (3), по закону Гука вычислим касательные напряжения  $\tau_{yz}$ :

$$\tau_{yz} = G \frac{\partial u_z}{\partial y} = -\frac{G}{\pi} \int_L \frac{(s-x)^2 - y^2}{[(s-x)^2 + y^2]^2} f(s) ds,$$

$$-\infty < x < \infty, \quad y < 0.$$

Отсюда предельным переходом  $y \rightarrow -0$  получим

$$\tau_{yz} \Big|_{y=0} = -\frac{G}{\pi} \int_L \frac{f(s) ds}{(s-x)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (4)$$

где интеграл на  $L$  при  $s = x, \quad x \in (a_k, b_k)$  понимается в смысле Адамара:

$$Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{a_k}^{x-\varepsilon} \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} + \int_{x+\varepsilon}^{b_k} \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} - \frac{f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \right],$$

$k = \overline{1, n}$ , или в эквивалентной форме

$$Hf = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[ \int_{a_k}^{x-\varepsilon} \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} + \int_{x+\varepsilon}^{b_k} \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} - \frac{2f(x)}{\varepsilon} \right],$$

$k = \overline{1, n}$ .

При помощи (4) реализуем первое граничное условие задачи (1). В результате приходим к следующему определяющему ГСИУ поставленной задачи:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} = -\frac{\tau(x)}{G}, \quad x \in L. \quad (5)$$

Его решение должно удовлетворять условиям (2).

После определения функции  $f(x)$  найдём касательные напряжения вне системы трещин  $L$  на оси  $Ox$  по уравнению (4) при  $x \in L'$ .

Отметим, что уравнением (5) в соответственных перемещениях и напряжениях описываются с точностью до упругой постоянной аналогичные задачи

о напряженном состоянии упругой плоскости с коллинеарной системой трещин нормального отрыва или поперечного сдвига в условиях плоской деформации.

Рассмотрим еще одну смешанную граничную задачу для упругой полуплоскости при плоской деформации, сводящаяся к решению ГСИУ (5). Пусть отнесенная к прямоугольной системе координат  $Oxy$  нижняя упругая полуплоскость  $y \leq 0$  обладает модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и находится в условиях плоской деформации.

Пусть далее эта полуплоскость на своей границе  $y = 0$  по двум полубесконечным отрезкам  $[-\infty, -a] \cup [a, \infty]$  и по системе отрезков

$$L = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k],$$

$$-a < a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k < \dots < b_n < a,$$

заклученной в отрезке  $[-a, a]$ , усилена абсолютно жесткими на растяжение-сжатие и абсолютно гибкими на изгиб стрингерами, а на остальной части отрезка  $[-a, a]$  действуют наперед заданные касательные силы интенсивности  $\tau(x)$ . В рамках известной модели Мелана [17] описанную задачу можно сформулировать в виде следующей смешанной граничной задачи для нижней упругой полуплоскости:

$$\begin{cases} u(x, y)|_{y=0} = \sigma_y(x, y)|_{y=0} = 0, \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \in [-\infty, -a] \cup [a, \infty] \cup L, \\ \tau_{yx}(x, y)|_{y=0} = \tau(x), \quad x \in l, \\ \sigma_y(x, y)|_{y=0} = 0, \quad x \in l, \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

$$\text{Здесь} \quad l = \bigcup_{k=1}^{n+1} [c_k, d_k], \quad c_1 = -a, \quad c_{k+1} = b_k,$$

$d_k = a_k, \quad k = \overline{1, n}, \quad d_{n+1} = a$  – система отрезков в  $[-a, a]$ , свободная от стрингеров;  $u, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{yx}$  – горизонтальные перемещения точек полуплоскости и компоненты напряжений.

Требуется определить перемещения граничных точек упругой полуплоскости на системе отрезков  $l$  на оси  $Ox$ , т.е. функцию  $f(x) = u(x, y)|_{y=0}$ ,  $x \in l, f(c_k) = f(d_k) = 0, k = \overline{1, n+1}, f(x) \in C^{1,2}(l)$ .

Для вывода определяющего ГСИУ задачи (6) воспользуемся известным решением первой граничной задачи для нижней упругой полуплоскости [6, с. 406–408].

$$\begin{aligned} \frac{du(x, -0)}{dx} &= \mathcal{G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(s) ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \mathcal{G} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}, \\ T(x) &= \tau_{yx}(x, y)|_{y=0} = \begin{cases} \tau(x), & x \in l, \\ \tau_0(x), & x \in R/l, \end{cases} \\ u(x, -0) &= u(x, y)|_{y=0} = \begin{cases} f(x), & x \in l, \\ 0, & x \in R/l. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

По формуле обращения Гильберта из (7) получим следующее ключевое уравнение задачи:

$$T(x) = -\frac{1}{\pi^2 \mathcal{G}} \int_l \frac{f'(s) ds}{s-x}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (8)$$

Это уравнение рассмотрим на системе отрезков  $l$  и реализуем второе граничное условие задачи (6). Получим следующее СИУ:

$$\frac{1}{\pi} \int_l \frac{f'(s) ds}{s-x} = -\pi \mathcal{G} \tau(x),$$

$$x \in l, \quad f(c_k) = f(d_k) = 0, \quad k = \overline{1, n+1},$$

которое после интегрирования по частям дает определяющее ГСИУ обсуждаемой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_l \frac{f(s) ds}{(s-x)^2} &= -\pi \mathcal{G} \tau(x), \quad x \in l, \\ f(c_k) &= f(d_k) = 0, \quad k = \overline{1, n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

ГСИУ (9) с точностью до упругой постоянной совпадает с ГСИУ (5).

Если же ключевое уравнение (8) рассматривать вне системы  $l$ , то получим касательные напряжения под стрингерами:

$$\tau_0(x) = -\frac{1}{\pi^2 \mathcal{G}} \int_l \frac{f'(s) ds}{s-x}, \quad x \in R/l.$$

Ниже займемся решением ГСИУ (5) при условиях (2). После введения безразмерных величин  $\xi = x/a, \eta = s/a, \varphi(\xi) = f(a\xi)/a, g(\xi) = \tau(a\xi)/G$  придем к следующему ГСИУ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\varphi(\eta) d\eta}{(\eta-\xi)^2} &= -g(\xi), \quad \xi \in L_0, \\ \varphi(\alpha_p) &= 0, \quad \varphi(\beta_p) = 0, \quad p = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$L_0 = \bigcup_{p=1}^n (\alpha_p, \beta_p), \quad \alpha_p = a_p/a, \quad \beta_p = b_p/a.$$

Здесь  $a$  – характерный параметр длины, например  $a = |a_1|$ , если  $a_1 \neq 0$ .

**Решение ГСИУ (10)**

При помощи интегрирования по частям уравнение (10) можно привести к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_0} \frac{\varphi'(\eta) d\eta}{\eta - \xi} = -g(\xi), \quad \xi \in L_0. \quad (11)$$

Решение СИУ (11) представляется формулой [7, с. 50, ф-лы 244–246].

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= \quad (12) \\ &= \frac{(-1)^{n+p}}{\sqrt{\Pi_n(\xi)}} \left[ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - P_{n-1}(\xi) \right], \\ \alpha_p &< \xi < \beta_p, \quad p = \overline{1, n}, \\ P_{n-1}(\xi) &= c_0 + c_1 \xi + \dots + c_{n-1} \xi^{n-1}, \\ \Pi_n(\xi) &= \prod_{m=1}^n |\xi - \alpha_m| |\xi - \beta_m|, \end{aligned}$$

где  $c_j, j = \overline{0, n-1}$ , – пока неизвестные коэффициенты многочлена  $P_{n-1}(\xi)$ .

В (12)  $\xi$  заменим на  $\tau$  и по  $\tau$  произведем интегрирование от  $\alpha_p$  до  $\xi, \alpha_p \leq \xi \leq \beta_p, p = \overline{1, n}$ . Получим

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \quad (13) \\ &= \frac{(-1)^{n+p+1}}{\pi} \left[ \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} K_{np}(\xi, \eta) \sqrt{\Pi_n(\eta)} g(\eta) d\eta + \right. \\ &+ \left. \sum_{j=0}^{n-1} c_j \int_{\alpha_p}^{\xi} \frac{\tau^j d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\eta)}} \right], \quad \alpha_p \leq \xi \leq \beta_p, \quad p = \overline{1, n}, \\ K_{np}(\xi, \eta) &= \int_{\alpha_p}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}(\tau - \eta)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\varphi(\alpha_p) = 0, p = \overline{1, n}$ . Полагая в (13)  $\xi = \beta_p$  и принимая во внимание условие  $\varphi(\beta_p) = 0$ , для определения постоянных  $c_j$  получим следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^n L_{pj}^{(n)} C_j = A_p^{(n)}, \quad p = \overline{1, n}, \quad C_j = c_{j-1},$$

$$L_{pj}^{(n)} = \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\tau^{j-1} d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

$$A_p^{(n)} = \sum_{m=1}^n (-1)^{n-m+1} \int_{\alpha_m}^{\beta_m} K_{np}(\beta_p, \eta) \sqrt{\Pi_n(\eta)} g(\eta) d\eta,$$

$$K_{np}(\beta_p, \eta) = \int_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{d\tau}{\sqrt{\Pi_n(\tau)}(\tau - \eta)}.$$

Разрешимость СЛАУ (14) может быть показана аналогично тому, как это было сделано в [6, 7].

Так как входящие в (13) и (14) интегралы  $K_{np}(\xi, \eta)$  и  $A_{pj}^{(n)}$  аналитически не вычисляются, для их вычисления воспользуемся известными [18] квадратурными формулами типа Гаусса по чебышевским узлам, которые после перевода на интервал  $(\alpha, \beta)$  будут иметь следующий вид:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}} = \frac{\pi}{M} \sum_{q=1}^M f\left(\frac{\beta - \alpha}{2} t_q + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$t_q = \cos((2q - 1)\pi/2M), \quad q = \overline{1, M},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)} h(\tau) d\tau =$$

$$= \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2 \frac{\pi}{M + 1} \sum_{m=1}^M \sin^2\left(\frac{\pi m}{M + 1}\right) \times \quad (15)$$

$$\times h\left(\frac{\beta - \alpha}{2} \tau_m + \frac{\beta + \alpha}{2}\right),$$

$$\tau_m = \cos\left(\frac{\pi m}{M + 1}\right), \quad m = \overline{1, M}.$$

Здесь  $M$  – любое натуральное число;  $t_q$  и  $\tau_m$  – чебышевские узлы, т.е. корни многочленов Чебышева первого рода  $T_M(t)$  и второго рода  $U_M(\tau)$  соответственно. Полагая

$$\sqrt{\Pi_n(\tau)} = \sqrt{\Pi_n^{(p)}(\tau)} \sqrt{(\tau - \alpha_p)(\beta_p - \tau)},$$

$$\Pi_n^{(p)}(\tau) = \prod_{m=1, m \neq p}^n |\tau - \alpha_m| |\tau - \beta_m|,$$

при помощи формул (15) получим

$$K_{np}(\beta_m, \tau_m^{(p)}) = \frac{\pi}{M} \sum_{q=1}^M \frac{1}{\sqrt{\Pi_n^{(p)}(\tau_q^{(p)})}} \frac{1}{t_q^{(p)} - \tau_m^{(p)}},$$

$$t_q^{(p)} = \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} t_q + \frac{\beta_p + \alpha_p}{2}, \quad (16)$$

$$\tau_m^{(p)} = \frac{\beta_p - \alpha_p}{2} \tau_m + \frac{\beta_p + \alpha_p}{2},$$

$$A_p^{(n)} =$$

$$= \frac{\pi}{M+1} \sum_{m=1}^A (-1)^{n-m+1} \left( \frac{\beta_m - \alpha_m}{2} \right)^2 \sum_{j=1}^M \sin^2 \left( \frac{\pi j}{M+1} \right) \times$$

$$\times \sqrt{\Pi_n^{(m)}(\tau_j^{(m)})} K_{np}(\beta_p, \tau_j^{(m)}) g(\tau_j^{(m)}),$$

$$\Pi_n^{(m)}(\tau) = \prod_{r=1, r \neq m}^n |\tau - \alpha_r| |\tau - \beta_r|,$$

$$K_{np}(\xi, \eta) = \frac{\pi}{M} \sum_{i_q^{(p)} \leq \xi} \frac{1}{\sqrt{\Pi_n^{(p)}(t_q^{(p)}) (t_q^{(p)} - \eta)}}.$$

Далее рассмотрим важный частный случай, когда  $L = [-a, -b] \cup [b, a]$ . Пусть  $a = |a_1|$ . В этом случае будем иметь

$$\alpha_1 = -1, \beta_1 = -k; \quad \alpha_2 = k, \beta_2 = 1, k = b/a,$$

$$L_0 = (-1, -k) \cup (k, 1), \quad \Pi_2(\xi) = (1 - \xi^2)(\xi^2 - k^2),$$

$$k < |\xi| < 1.$$

В разбираемом частном случае элементы матрицы СЛАУ (14) вычисляются аналитически.

Введём для сокращения дальнейших построений функции  $\gamma(\xi, \eta) = \sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - k^2)}$ ,

$$\gamma_0(\xi) = \gamma(\xi, \xi) = \sqrt{(1 - \xi^2)(\xi^2 - k^2)}. \quad \text{Тогда}$$

$$L_{11}^{(2)} = \int_{-1}^{-k} \frac{\tau d\tau}{\gamma_0(\tau)} = - \int_k^1 \frac{\tau d\tau}{\gamma_0(\tau)}.$$

Далее, воспользовавшись выражением известного интеграла из [19, с. 260, ф-ла 3.153.10], найдём  $L_{11}^{(2)} = K(k') = K'$ ,  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ , где  $K(k')$  – полный эллиптический интеграл первого рода модуля  $k'$ .

Обращаясь к  $L_{12}^{(2)}$ , запишем

$$L_{12}^{(2)} = \int_{-1}^{-k} \frac{\tau d\tau}{\gamma_0(\tau)} = - \int_k^1 \frac{\tau d\tau}{\gamma_0(\tau)}.$$

Этот элементарный интеграл берется подстановкой  $s = \tau^2$ . В результате  $L_{12}^{(2)} = -\pi/2$ . В остальных двух случаях

$$L_{21}^{(2)} = L_{11}^{(2)} = K', \quad L_{22}^{(2)} = -L_{12}^{(2)} = \pi/2.$$

Приняв во внимание формулы (15) и (16), представим (14) в виде

$$\begin{cases} L_{11}^{(2)} C_1 + L_{12}^{(2)} C_2 = A_1^{(2)}, \\ L_{21}^{(2)} C_1 + L_{22}^{(2)} C_2 = A_2^{(2)}, \end{cases}$$

где  $A_1^{(2)} =$

$$= \int_k^1 [K_{21}(-k, -\eta) g(-\eta) - K_{21}(-k, \eta) g(\eta)] \times$$

$$\times \gamma_0(\eta) d\eta = \left( \frac{1-k}{2} \right)^2 \frac{\pi}{M+1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^M [K_{21}(-k, -\tau_j^{(1)}) g(-\tau_j^{(1)}) - K_{21}(-k, \tau_j^{(1)}) g(\tau_j^{(1)})] \times$$

$$\times \sin^2 \left( \frac{\pi j}{M+1} \right) \sqrt{(1 + \tau_j^{(1)}) (\tau_j^{(1)} + k)},$$

$$\tau_j^{(1)} = \frac{1-k}{2} \tau_j - \frac{1+k}{2},$$

$$A_2^{(2)} = \left( \frac{1-k}{2} \right)^2 \frac{\pi}{M+1} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^M [K_{22}(1, -\tau_j^{(2)}) g(-\tau_j^{(2)}) - K_{22}(1, \tau_j^{(2)}) g(\tau_j^{(2)})] \times$$

$$\times \sin^2 \left( \frac{\pi j}{M+1} \right) \sqrt{(1 + \tau_j^{(2)}) (\tau_j^{(2)} + k)},$$

$$\tau_j^{(2)} = \frac{1-k}{2} \tau_j + \frac{1+k}{2},$$

$$K_{21}(-k, \eta) = - \int_k^1 \frac{d\tau}{\gamma_0(\tau)(\tau + \eta)} =$$

$$= - \frac{\pi}{M} \sum_{q=1}^M \frac{1}{\sqrt{(1 + t_q^{(1)}) (k + t_q^{(1)})}} \frac{1}{t_q^{(1)} + \eta},$$

$$K_{22}(1, \eta) = \int_k^1 \frac{d\tau}{\gamma_0(\tau)(\tau - \eta)} =$$

$$= \frac{\pi}{M} \sum_{q=1}^M \frac{1}{\sqrt{(1 + t_q^{(2)}) (t_q^{(2)} + k) (t_q^{(2)} - \eta)}},$$

$$t_q^{(1)} = \frac{1-k}{2} t_q - \frac{1+k}{2}, \quad t_q^{(2)} = \frac{1-k}{2} t_q + \frac{1+k}{2}.$$

Решение ГСИУ (10) в случае двух симметрически расположенных интервалов  $L_0 = (-1, -k) \cup (k, 1)$  построим в других аналитических формах более простой структуры. С этой целью решение уравнения (10) разобьём на симметрическую и кососимметрическую части. В случае симметрической ча-

сти  $g(-\xi) = g(\xi)$  и, следовательно,  $\varphi(-\xi) = \varphi(\xi)$ ,  $\varphi'(-\xi) = -\varphi'(\xi)$ ,  $\xi \in [-1, -k] \cup [k, 1]$ , причем  $\varphi(\pm k) = \varphi(\pm 1) = 0$ . В этом случае формула обращения (12) для соответствующего СИУ (11) преобразуется к виду

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\pi\gamma_0(\xi)} \int_k^1 \frac{\gamma_0(\eta) g(\eta) 2\eta d\eta}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{C_0}{\gamma_0(\xi)}, \quad (17)$$

$k < \xi < 1$ .

Для определения постоянной  $C_0$  воспользуемся

условием  $\int_k^1 \varphi'(\xi) d\xi = 0$ , которое после простых

преобразований даёт

$$C_0 = \frac{c}{2\pi K'} \int_{-1}^1 I_0(k, \tau) \sqrt{1 - \tau^2} g_0(\tau) d\tau, \quad (18)$$

$$g_0(\tau) = g(\sqrt{c\tau + d}),$$

$$I_0(k, \tau) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{ct + d} \sqrt{1 - t^2} (t - \tau)},$$

$$c = \frac{1 - k^2}{2}, \quad d = \frac{1 + k^2}{2}.$$

Далее в (17)  $\xi$  заменим на  $u$  и по  $u$  произведем интегрирование от  $u$  до  $\xi$ ,  $k \leq \xi \leq 1$ . Получим

$$\varphi(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_k^1 J(\xi, \eta; k) g(\eta) \eta \gamma_0(\eta) d\eta + C_0 I(\xi, k), \quad (19)$$

$$k \leq \xi \leq 1,$$

$$I(\xi, k) = \int_k^\xi \frac{du}{\gamma_0(u)}, \quad J(\xi, \eta; k) = \int_k^\xi \frac{du}{\gamma_0(u)(\eta^2 - u^2)}.$$

Вычислим интегралы  $I(\xi, k)$  и  $J(\xi, \eta, k)$  из (19).

Имеем

$$I(\xi, k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - \int_0^{\chi(\xi)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$

$$= K' - F(\varphi, k'),$$

где  $F(\varphi, k')$  – неполный эллиптический интеграл первого рода [19, с. 918]. В результате

$$I(\xi, k) = K' - F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'}\right), k'\right), \quad (20)$$

$k \leq \xi \leq 1$ .

Для  $J(\xi, \eta, k)$  имеем

$$J(\xi, \eta; k) = \frac{1}{\eta^2 - 1} \left[ \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \omega(\eta), k'\right) - \Pi\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{k'}\right), \omega(\eta), k'\right) \right], \quad (21)$$

$k \leq \xi \leq 1, \quad \eta \neq \pm 1$ ,

где  $\Pi(\varphi, n, k)$  – неполный эллиптический интеграл третьего рода [19, с. 919], откуда

$$J(\xi, \pm 1; k) = J(\xi, 1; k) = \int_k^\xi \frac{du}{(1-u^2)\gamma_0(u)} =$$

$$= \frac{1}{k'^2} [k^2 \Pi(\psi, 1, k) + k'^2 F(\psi, k')], \quad (22)$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{k'\xi}\right) = \arcsin(\chi(\xi)/\xi),$$

$k \leq \xi \leq 1$ .

Так как  $\varphi(1) = 0$ , то из этих формул вытекает, что постоянная  $C_0$ , кроме формулы (18), может быть выражена также формулой

$$C_0 = \frac{2}{\pi I(1, k)} \int_k^1 J(1, \eta, k) g(\eta) \eta \gamma_0(\eta) d\eta,$$

$$I(1, k) = K',$$

$$J(1, \eta, k) = \begin{cases} \frac{1}{\eta^2 - 1} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \omega(\eta), k'\right), & \eta \neq 1, \\ \frac{1}{k'^2} \left[ k^2 \Pi\left(\frac{\pi}{2}, 1, k\right) + k'^2 K' \right], & \eta = 1. \end{cases}$$

Таким образом, симметрическая часть решения ГСИУ (10) в обсуждаемом частном случае выражается формулами (19)–(22).

Симметрическую часть решения указанного ГСИУ построим также методом многочленов Чебышева. С этой целью воспользуемся спектральным соотношением [20, 21]

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \ln \frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \frac{T_n(Y) d\eta}{\gamma_0(\eta)} = \mu_n T_n(X), \quad (23)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad k < \xi < 1,$$

$$X = \cos \vartheta,$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{K'} \int_1^{\xi/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(1 - k^2 u^2)}}, \quad k \leq \xi, \quad \eta \leq 1,$$

$$Y = \cos \varphi,$$



$$\varphi = \frac{\pi}{K'} \int_1^{\eta/k} \frac{du}{\sqrt{(u^2-1)(1-k^2u^2)}},$$

$$\mu_n = \begin{cases} \frac{K'}{\pi n} \operatorname{th}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right), & n=1,2,\dots \\ K, & n=0. \end{cases}$$

Здесь  $T_n(X)$  – многочлены Чебышева первого рода аргумента  $X$ ;  $\mathcal{G}$  при помощи подстановки  $u=1/t$  в интеграле будет выражаться неполным эллиптическим интегралом первого рода [19, с. 260, ф-ла 10]:

$$\mathcal{G} = \frac{\pi}{K'} F\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{\xi^2 - k^2}}{\xi k'}\right), k'\right), \quad k' = \sqrt{1 - k^2}.$$

Условия ортогональности многочленов Чебышева  $T_n(X)$ :

$$\int_k^1 T_m(X) T_n(X) \frac{d\xi}{\gamma_0(\xi)} = \begin{cases} K', & m = n = 0, \\ K'/2, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (24)$$

Обе части спектрального соотношения (23) продифференцируем по  $\xi$ . После элементарных преобразований получим

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2} \frac{T_n(Y) d\eta}{\gamma_0(\eta)} = \begin{cases} -\operatorname{th}\left(\frac{\pi n K}{K'}\right) \frac{\sqrt{1 - X^2} U_{n-1}(X)}{\gamma_0(\xi)}, & n=1,2,\dots \\ 0, & n=0 \quad k < \xi < 1. \end{cases} \quad (25)$$

С другой стороны, СИУ (11), когда  $L_0 = [-1, -k] \cup (k, 1)$ , в симметрическом случае преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \frac{2\eta \varphi'(\eta) d\eta}{\eta^2 - \xi^2} = -g(\xi), \quad k < \xi < 1. \quad (26)$$

Решение СИУ (26) представим в форме бесконечного ряда

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{\gamma_0(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} y_n T_n(X), \quad k < \xi < 1, \quad (27)$$

с неизвестными коэффициентами  $y_n$ . Этот ряд подставим в (26). Воспользовавшись соотношением (25), получим

$$\frac{\sqrt{1 - X^2}}{\gamma_0(\xi)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n y_n U_{n-1}(X) = g(\xi), \quad k < \xi < 1.$$

Коэффициенты  $y_n$  определим при помощи условий ортогональности многочленов Чебышева второго рода с видоизмененным аргументом:

$$\int_k^1 U_{m-1}(X) U_{n-1}(X) \frac{\sqrt{1 - X^2} d\xi}{\gamma_0(\xi)} = \begin{cases} \frac{K'}{2}, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

которые дают

$$y_n = \frac{2}{K'} \operatorname{cth}(\pi n K / K') g_n, \quad n=1,2,\dots$$

$$g_n = \int_k^1 g(\xi) U_{n-1}(X) d\xi. \quad (28)$$

Далее обе части (27) проинтегрируем от  $k$  до  $\xi$ , предварительно заменив  $\xi$  на  $\eta$ . Получим

$$\varphi(\xi) = y_0 \int_k^{\xi} \frac{d\eta}{\gamma_0(\eta)} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \int_k^{\xi} \frac{T_n(Y) d\eta}{\gamma_0(\eta)}. \quad (29)$$

Положим  $\xi=1$  и воспользуемся формулой (24). В результате находим, что  $y_0=0$ . Для вычисления второго интеграла из (29) перейдем к переменной  $\varphi$ . Согласно третьей формуле из (23)

$$\frac{d\eta}{\gamma_0(\eta)} = \frac{K'}{\pi} d\varphi. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\int_k^{\xi} \frac{T_n(Y) d\eta}{\gamma_0(\eta)} = \frac{K'}{\pi} \int_0^{\mathcal{G}} \cos(n\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{K'}{\pi n} \sin(n\mathcal{G}) = \frac{K'}{\pi n} \frac{\sin(n\mathcal{G})}{\sin \mathcal{G}} \sin \mathcal{G} =$$

$$= \frac{K'}{\pi n} \sqrt{1 - X^2} U_{n-1}(X), \quad n=1,2,\dots$$

В результате

$$\varphi(\xi) = \frac{K'}{\pi} \sqrt{1 - X^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n U_{n-1}(X)}{n},$$

где коэффициенты  $y_n$  даются формулами (28).

Перейдем к кососимметрической части решения ГСИУ (10) при  $L_0 = [-1, -k] \cup (k, 1)$ . В этом случае  $g(-\xi) = -g(\xi)$ ,  $\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$  и  $\varphi'(-\xi) = \varphi'(\xi)$ ,  $\xi \in L_0$ . Формула обращения (12) для соответствующего СИУ (11) преобразуется к виду

$$\varphi'(\xi) = \frac{2\xi}{\pi \gamma_0(\xi)} \int_k^1 \frac{\gamma_0(\eta) g(\eta) d\eta}{\eta^2 - \xi^2} + \frac{C_1 \xi}{\gamma_0(\xi)},$$

$$k < \xi < 1.$$

В этой формуле  $\xi$  заменим на  $u$  и по  $u$  произведем интегрирование от  $k$  до  $\xi$ ,  $k \leq \xi \leq 1$ . В результате получим

$$\varphi(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_k^1 J_1(\xi, \eta; k) \gamma_0(\eta) g(\eta) d\eta + C_1 I_1(\xi, k),$$

$$I_1(\xi, k) = \int_k^{\xi} \frac{udu}{\gamma_0(u)}, \quad (30)$$

$$J_1(\xi, \eta; k) = \int_k^{\xi} \frac{udu}{\gamma_0(u)(\eta^2 - u^2)}.$$

Для вычисления интеграла  $I_1(\xi, k)$  положим в нем  $u^2 = t$ . После элементарных выкладок находим

$$I_1(\xi, k) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2}\right) + \frac{\pi}{4}, \quad (31)$$

$$k \leq \xi \leq 1.$$

В случае интеграла  $J_1(\xi, \eta; k)$  воспользуемся, как и выше, подстановкой  $u = \sqrt{1 - k'^2 t^2}$ . Тогда

$$J_1(\xi, \eta; k) = \frac{1}{k'^2} \int_{\chi(\xi)}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - A^2)}},$$

$$A^2 = \frac{1 - \eta^2}{k'^2}, \quad \chi(\xi) = \frac{1}{k'} \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Далее применяем третью подстановку Эйлера

$$\sqrt{1-t^2} = v(1+t) \Rightarrow t = \frac{1-v^2}{1+v^2}, \quad v = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Последующие элементарные преобразования приводят исходный интеграл к виду

$$J_1(\xi, \eta; k) = \frac{2}{k'^2(1-A^2)} \int_0^{\sqrt{\frac{1-\chi(\xi)}{1+\chi(\xi)}}} \frac{(1+v^2)dv}{(v^2 - B^2)(v^2 - B'^2)},$$

$$B^2 = \frac{1-A}{1+A}, \quad B' = \frac{1}{B}, \quad A = \frac{1-\eta}{k'^2}.$$

Вычисляя элементарные интегралы от рациональной функции в правой части, после несложных выкладок окончательно находим

$$J_1(\xi, \eta; k) = \frac{1}{2\gamma_0(\eta)} \ln \frac{\gamma(\xi, \eta) + \gamma(\eta, \xi)}{|\gamma(\xi, \eta) - \gamma(\eta, \xi)|}. \quad (32)$$

Приняв во внимание (31) и (32), формулу (30) можно представить в виде

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_k^1 \ln \frac{\gamma(\xi, \eta) + \gamma(\eta, \xi)}{|\gamma(\xi, \eta) - \gamma(\eta, \xi)|} g(\eta) d\eta + \frac{C_1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2}\right) \right], \quad k \leq \xi \leq 1.$$

Очевидно, что  $\varphi(k) = 0$ . С другой стороны, удовлетворив условию  $\varphi(1) = 0$ , обнаружим, что  $C_1 = 0$ . В итоге симметрическая часть решения ГСИУ (10) для двух симметрических отрезков выражается формулой

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_k^1 \ln \frac{\gamma(\xi, \eta) + \gamma(\eta, \xi)}{|\gamma(\xi, \eta) - \gamma(\eta, \xi)|} g(\eta) d\eta, \quad k \leq \xi \leq 1.$$

Кососимметрическую часть решения ГСИУ (10) построим также методом ортогональных многочленов Чебышева. С этой целью обратимся к известному соотношению

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-s|} \frac{T_n(s) ds}{\sqrt{1-s^2}} = \begin{cases} \frac{1}{n} T_n(x), & n = 1, 2, \dots, \\ \ln 2, & n = 0, \quad -1 < x < 1, \end{cases}$$

и в нем положим

$$x = \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2}, \quad s = \frac{2\eta^2 - k^2 - 1}{1 - k^2}, \quad (33)$$

$$k \leq \xi, \quad \eta \leq 1, \quad \xi = \sqrt{cx + d}, \quad \eta = \sqrt{cs + d},$$

$$-1 \leq x, s \leq 1, \quad c = \frac{1 - k^2}{2}, \quad d = \frac{1 + k^2}{2}.$$

В результате простых преобразований указанное спектральное соотношение преобразуется в следующее:

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \ln \frac{1}{|\xi^2 - \eta^2|} T_n\left(\frac{2\eta - k^2 - 1}{1 - k^2}\right) \frac{\eta d\eta}{\gamma_0(u)} = \lambda_n T_n\left(\frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2}\right), \quad (34)$$

$$\lambda_n = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & n = 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{2} \ln 2 \left(\frac{2}{c}\right), & n = 0, \quad k < \xi < 1. \end{cases}$$

При этом условия ортогональности многочленов Чебышева первого рода с видоизмененным аргументом имеют вид

$$\int_k^1 T_m \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) T_n \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) \gamma_0(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi c}{2}, & m = n = 0, \\ \frac{\pi c}{4}, & m = n \neq 0, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Обе части спектрального соотношения (34) продифференцируем по  $\xi$ , а затем по (33) перейдем к переменным  $x, s$ . В результате получим известное соотношение [19, с. 847, ф-ла 7.344.1]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Если в его левой части произвести интегрирование по частям, то получим следующее соотношение:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{U_{n-1}(s)\sqrt{1-s^2} ds}{(s-x)^2} = -nU_{n-1}(x), \quad (35)$$

$$n = 1, 2, \dots; \quad -1 < x < 1.$$

Интеграл в (35) при  $s = x$  понимается в смысле Адамара. Это соотношение, которое может быть интерпретировано как своеобразное спектральное выражение для ядра  $1/[\pi(s-x)^2]$ , приведено в [5]. Теперь в (35) по формулам (33) обратимся к переменным  $\xi, \eta$ . После очевидных преобразований получим нужное нам следующее соотношение:

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \frac{U_{n-1} \left( \frac{2\eta^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) \eta \gamma_0(\eta)}{(\eta^2 - \xi^2)^2} d\eta = -\frac{n}{2} U_{n-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad k < \xi < 1. \quad (36)$$

Условия ортогональности входящих в (36) многочленов Чебышева второго рода с видоизмененным аргументом имеют вид

$$\int_k^1 U_{m-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) U_{n-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) \times 2\xi \gamma_0(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{\pi c^2}{2}, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \quad c = \frac{1 - k^2}{2}. \quad (37)$$

Далее ГСИУ (10), когда  $L_0 = [-1, -k] \cup (k, 1)$ , в кососимметрическом случае приведем к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_k^1 \frac{2\eta \varphi(\eta) d\eta}{(\eta^2 - \xi^2)^2} = -\frac{g(\xi)}{2\xi}, \quad k < \xi < 1. \quad (38)$$

Его решение представим посредством бесконечного ряда

$$\varphi(\xi) = \gamma_0(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} x_n U_{n-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right), \quad (39)$$

$$k < \xi < 1,$$

с неизвестными коэффициентами  $x_n$ .

Подставляя (39) в (38), меняя порядок интегрирования и суммирования и используя соотношение (36), получим

$$-\sum_{n=1}^{\infty} n x_n U_{n-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) = -\frac{g(\xi)}{2\xi}, \quad k < \xi < 1.$$

Отсюда по условиям ортогональности (37) находим

$$x_n = \frac{2g_n}{\pi c^2},$$

$$g_n = \int_k^1 g(\xi) U_{n-1} \left( \frac{2\xi^2 - k^2 - 1}{1 - k^2} \right) \gamma_0(\xi) d\xi,$$

$$n = 1, 2, \dots$$

Последний интеграл можно вычислить по второй квадратурной формуле (15).

### Заключение

К решению ГСИУ на нескольких интервалах с классическим гиперсингулярным ядром Коши здесь применены методы СИУ с обычным ядром Коши. К этому ГСИУ, как в работах [18–20], можно применить и методы краевых задач теории аналитических функций. Однако в обоих случаях возникают значительные трудности при аналитическом вычислении нужных сингулярных и обычных интегралов. В плане преодоления этих трудностей эффективнее представляется метод квадратурных формул типа Гаусса, с вычислительной – метод ортогональных многочленов. Оба метода частично использованы в настоящей работе. При помощи квадратурных формул можно провести численный анализ аналитических формул, полученных здесь методами ГСИУ и ортогональных многочленов Чебышева. Изложенные результаты могут быть использованы в смежных исследованиях.

## Литература

1. *Hadamard J.* Lectures of Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. N.Y.: Dover Publications, 1952. 322 p.

2. *Lifanov I., Poltavskii L., Vainikko M., Polyanin A.* Hypersingular Integral Equations and Their Applications. Boca Raton; London, 2004.

3. *Ang W.T.* Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis. Cambridge: Woodhead Publishing, 2013. 212 p.

4. *Kaya A.C., Erdogan F.* On the solution of integral equations with strongly singular kernels // *Quart. Appl. Math.* 1987. Vol. 45 (1). P. 105–122.

5. *Chan Y.-Sh., Fannjiang A.C., Paulino G.H.* Integral equations with hypersingular kernels - theory and applications to fracture mechanics // *International J. of Engineering Science.* 2003. Vol. 41. P. 683–720.

6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

7. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.;Л.: 1949. 270 с.

8. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

9. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

10. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

11. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.

12. *Schleif M.* Singuläre Integraloperatoren in Hilbert-Räume mit Gewichtsfunktion // *Mathematische Nachrichten.* 1969. Vol. 42 (1–3). S. 145–155.

13. *Martin P.A.* Exact solution of a simple hypersingular integral equation // *J. of Integral Equations and Application.* 1992. Vol. 4 (2). P. 197–204.

14. *Dutta B., Banerjee S.* Solution of a hypersingular integral equation in two disjoint intervals // *Appl. Math. Lett.* 2009. Vol. 22 (8). P. 1281–1285.

15. *Mkhitarjan S.M., Mkrtchyan M.S., Kanetsyan E.G.* Hypersingular Integral Equations Arising in the Boundary Value Problems of the Elasticity Theory // *The Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics.* 2020. Vol. 73, iss. 1. P. 51–75.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1976. 716 с.

17. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen // *Ingr. Arch.* 1932. Bd. 3, № 2. S. 123–129.

18. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443 с.

19. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМ, 1963. 1100 с.

20. *Мхитарян С.М.* О собственных функциях интегрального оператора, порожденного логарифмическим ядром на двух интервалах, и их приложениях к контактному задачам // *Изв. АН АрмССР. Механика,* 1982. Т. 35, № 6. С. 3–18.

21. *Александров В.М., Коваленко Е.В., Мхитарян С.М.* Об одном методе получения спектральных соотношений для интегральных операторов смешанных задач механики сплошных сред // *ПММ.* 1982. Т. 46, вып. 6. С. 1028–1036.

## References

1. Hadamard J. (1952). *Lectures of Cauchy's problem in linear partial differential equations.* New York, Dover Publ., 322 p.

2. Lifanov I., Poltavskii L., Vainikko M., Polyanin A. (2004). *Hypersingular integral equations and their applications.* Boca Raton, London.

3. Ang W.T. (2013). *Hypersingular integral equations in fracture analysis.* Cambridge, Woodhead Publ., 212 p.

4. Kaya A.C., Erdogan F. (1987). On the solution of integral equations with strongly singular kernels. *Quart. Appl. Math.*, vol. 45 (1), pp. 105–122.

5. Chan Y.-Sh., Fannjiang A.C., Paulino G.H. (2003). Integral equations with hypersingular kernels - theory and applications to fracture mechanics. *International J. of Engineering Science*, vol. 41, pp. 683–720.

6. Muskhelishvili N. I. (1966). *Some main problems of the mathematical theory of elasticity.* Moscow, Nauka Publ., 708 p. (in Russian).

7. Shtaerman I.Ya. (1949). *Contact problem of elasticity theory.* Moscow, Leningrad, 270 p. (in Russian).

8. Galin L.A. (1980). *Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity.* Moscow, Nauka Publ., 304 p. (in Russian).

9. Vorovich I.I., Alexandrov V.M., Babeshko V.A. (1974). *Non-classical mixed problems of elasticity theory.* Moscow, Nauka Publ., 456 p. (in Russian).

10. Cherepanov G.P. (1974). *Mechanics of brittle destruction.* Moscow, Nauka Publ., 640 p. (in Russian).

11. *Mechanics of contact interactions.* (2001). I.I. Vorovich, V.M. Alexandrov (Eds.). Moscow, Fizmatlit Publ., 670 p. (in Russian).

12. Schleif M. (1969). Singuläre Integraloperatoren in Hilbert-Räume mit Gewichtsfunktion. *Mathematische Nachrichten*, vol. 42 (1-3), S. 145-155.
13. Martin P.A. (1992). Exact solution of a simple hypersingular integral equation. *J. of Integral Equations and Application*, vol. 4 (2), pp. 197-204.
14. Dutta B., Banerjea S. (2009). Solution of a hypersingular integral equation in two disjoint intervals. *Appl. Math. Lett.*, vol. 22 (8), pp. 1281-1285.
15. Mkhitarian S.M., Mkrtyan M.S., Kanetsyan E.G. (2020). Hypersingular Integral Equations Arising in the Boundary Value Problems of the Elasticity Theory. *The Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 73, iss. 1, pp. 51-75.
16. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. (1976). *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow, Nauka Publ., 716 p. (in Russian).
17. Melan E. (1932). Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. *Ingr. Arch.*, bd. 3, no. 2, pp. 123-129.
18. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Datsyshin A.P. (1976). *Stress distribution near cracks in plates and shells*. Kiev, Naukova Dumka Publ., 443 p. (in Russian).
19. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. (1963). *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow, FM Publ., 1100 p. (in Russian).
20. Mkhitarian S.M. (1982). On eigenfunctions of an integral operator generated by a logarithmic kernel on two intervals and their application to contact problems. *Izv. AN ArmSSR. Mekhanika*, vol. 35, no. 6, pp. 3-18. (in Russian).
21. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V., Mkhitarian S.M. (1982). On a method for obtaining spectral relations for integral operators of mixed problems in continuum mechanics. *PMM*, vol. 46, no. 6, pp. 1028-1036. (in Russian).

---

*Поступила в редакцию / Received*

*19 марта 2020 г. / March 19, 2020*

УДК 532.13+517.958

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-84-93

**РАСТВОРЫ ПОЛИМЕРОВ И ИХ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ\***© 2020 г. В.В. Пухначев<sup>1,2</sup>, О.А. Фроловская<sup>1</sup>, А.Г. Петрова<sup>1,3</sup><sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия,<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,<sup>3</sup>Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия**POLYMER SOLUTIONS AND THEIR MATHEMATICAL MODELS**V.V. Pukhnachev<sup>1,2</sup>, O.A. Frolovskaya<sup>1</sup>, A.G. Petrova<sup>1,3</sup><sup>1</sup>Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia,<sup>2</sup>Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia,<sup>3</sup>Altai State University, Barnaul, Russia

Пухначев Владислав Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, пр. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск, 630090, Россия; профессор, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 1, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: pukhnachev@gmail.com

Vladislav V. Pukhnachev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member, Russian Academy of Sciences, Main Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Lavrentyeva Ave., 15, Novosibirsk, 630090, Russia; Professor, Novosibirsk State University, Pirogova St., 1, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: pukhnachev@gmail.com

Фроловская Оксана Александровна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, пр. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: oksana@hydro.nsc.ru

Oxana A. Frolovskaya - Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Lavrentyeva Ave., 15, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: oksana@hydro.nsc.ru

Петрова Анна Георгиевна – доктор физико-математических наук, профессор, факультет математики и информационных технологий, Алтайский государственный университет, пр. Ленина, 61, г. Барнаул, 656049, Россия; старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, пр. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: annapetrova07@mail.ru

Anna G. Petrova - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics and IT, Altai State University, Lenina Ave., 61, Barnaul, 656049, Russia; Senior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Lavrentyeva Ave., 15, Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: annapetrova07@mail.ru

Математические модели движения водных растворов полимеров изучаются в течение последних 50 лет. Исходная модель (Войткунский, Амфилохийев и Павловский, 1970) содержит два ключевых параметра – релаксационную вязкость и время релаксации напряжений сдвига. В предельном случае, когда последний параметр мал, возникает модель Павловского (1971). Ее уравнения близки к уравнениям жидкости второго порядка (Ривлин и Эриксен, 1955). Статья содержит обзор работ по всем трем моделям и новые результаты, относящиеся к модели Павловского. Построено решение задачи о нестационарном слоистом течении водного раствора полимера в слое со свободной границей, в краевое условие на которой входит производная искомой функции по времени. Выведены уравнения, описывающие движение полимерного раствора в ламинарном пограничном слое вблизи прямолинейной пластины. Входящий в них параметр характеризует отношение толщины пограничного слоя Прандтля к толщине релаксационного пограничного слоя. Влияние этого параметра на картину движения исследовано на примере стационарного течения около критической точки.

**Ключевые слова:** растворы полимеров, слоистые течения, пограничный слой, критическая точка.

Mathematical models for the motion of weak solutions of polymers have been studied over the past 50 years. The initial model (Voitkunsii, Amfilokhiev, and Pavlovskii, 1970) contains two key parameters - relaxation viscosity and shear stress relaxation time. In the limiting case, when the last parameter is small, the Pavlovskii model (1971) arises. Its equations are

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00096).

close to second-grade fluid equations (Rivlin and Eriksen, 1955). The paper contains an overview of the works on all three models and new results related to the Pavlovskii model. The solution to the problem of the unsteady layered flow of an aqueous polymer solution in a layer with a free boundary, the boundary condition on which includes the time derivative of the desired function is constructed. We derive the equations that describe the motion of a polymer solution in a laminar boundary layer near a rectilinear plate. The parameter included in equations characterizes the ratio of the thickness of the Prandtl boundary layer to the thickness of the relaxation boundary layer. We study the influence of this parameter on the motion picture by the example of a stationary flow near a critical point.

**Keywords:** polymers solutions, layered flows, boundary layer, critical point.

## Введение

Известно, что если в воду добавить небольшое количество полимера, то вязкость и плотность получившегося раствора практически не изменятся и останутся постоянными (в отличие от его реологических свойств). Зафиксированное снижение сопротивления трения за счет полимерных добавок [1] стимулировало цикл как экспериментальных работ по изучению движения водных растворов полимеров в трубах и в пограничном слое при ламинарном и турбулентном режимах течения [2–8], так и теоретических исследований [9–11]. Подробная библиография работ, посвященных течению полимерных растворов в трубах, содержится в [12].

Первая математическая модель движения водного раствора полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работе Я.И. Войткунского, В.Б. Амфилохиева и В.А. Павловского [9]. Авторы исходили из варианта модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости. Искомыми функциями в этой модели являются вектор скорости  $\mathbf{v}$  и давление жидкости  $p$ . Среда предполагается несжимаемой с постоянными плотностью  $\rho$  и кинематической вязкостью  $\nu$ . Определяющее реологическое соотношение в этой модели имеет вид

$$P = -pI + 2\mu D + 2\frac{\tilde{\kappa}}{\theta} \int_{-\infty}^t \exp\left\{-\frac{s-t}{\theta}\right\} \frac{d}{ds} D(s) ds. \quad (1)$$

Здесь  $\mu = \rho\nu$  – динамическая вязкость;  $\theta$  – время релаксации;  $\tilde{\kappa}$  – релаксационная вязкость;  $D$  – тензор скоростей деформаций, соответствующий векторному полю  $\mathbf{v}$ ; символ  $d/dt$  означает оператор полного дифференцирования по времени, так что  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}$ . Величины  $\theta$  и  $\mu$  также считаются постоянными. Эта модель содержит два дополнительных параметра по сравнению с классической моделью Навье – Стокса: время релаксации и релаксационную вязкость.

Затем в работе В.А. Павловского [10] эта модель была упрощена и использовалась для описания турбулентного пограничного слоя в предель-

ном случае малых времен релаксации. Реологическое соотношение в этой модели после удержания первого члена в асимптотическом разложении тензора напряжений (1) по параметру  $\theta \rightarrow 0$  принимает вид

$$P = -pI + 2\mu D + 2\tilde{\kappa} \frac{dD}{dt}. \quad (2)$$

В статье [11] построено решение первой модели трех авторов, описывающее плоское стационарное течение вблизи критической точки.

Другая модификация модели движения разбавленных водных растворов полимеров состоит в замене конвективной производной тензора  $D$  в соотношении (2) его объективной производной

$$\frac{\tilde{d}D}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)D + DW - WD,$$

где  $W$  – антисимметричная часть тензора  $\nabla\mathbf{v}$  (определение объективной производной см. в [13]). Еще одно упрощение получается при замещении конвективной производной вектор-функции  $\Delta\mathbf{v}$  ее частной производной по времени.

Близкая модель жидкости второго порядка (second grade fluid) появилась в работе [14] и с тех пор служит предметом исследования безотносительно динамики полимерных растворов [15, 16]. Аналогично с альфа-моделью турбулентности можно проследить в работах [17, 18]. Анализ корректности краевых и начально-краевых задач для моделей движения водных растворов полимеров и жидкости второго порядка посвящены работы [19–25].

Теоретико-групповые свойства первых трех моделей изучены в [26–28]. Там же приведены примеры точных решений, описывающих стационарные и нестационарные плоские и осесимметричные движения около критической точки. Соответствующие им уравнения имеют двойное вырождение за счет обращения в нуль коэффициента при старшей производной на стенке и за счет малости параметра релаксационной вязкости, входящего в этот коэффициент. Оказалось, что две эти сингулярности нейтрализуют друг друга, и полученные решения не содержат функций типа пограничного слоя [29, 30].

Качественные свойства решений наследственной модели движения водных растворов полимеров, ее модификации в предельном случае малых времен релаксации и близкой модели жидкости второй степени исследованы в [31, 32]. Для всех трех моделей изучены нестационарные течения жидкости с прямолинейными траекториями. В первом случае уравнения движения тождественны уравнениям акустики вязкого газа при подходящем соответствии параметров моделей. В двух других случаях возможно образование слабых разрывов, которые сохраняются в процессе движения. Также построено точное решение, описывающее течение в полупространстве, индуцированное вращением твердой плоскости (аналог классического вихря Кармана). Рассмотрена задача о движении раствора в цилиндрической трубе произвольного сечения под действием продольного градиента давления. Установлено, что в первых двух моделях существуют течения с прямолинейными траекториями, аналогичные течению Пуазейля с давлением, не зависящим от поперечных координат. В третьей модели прямолинейность траекторий тоже сохраняется, однако здесь давление зависит от всех трех пространственных переменных. Для периодических по времени движений градиент давления в поперечных направлениях колеблется с удвоенной частотой по сравнению с частотой колебаний продольного градиента. Такая же ситуация имеет место и в задаче о движении раствора полимера во внешности круглого цилиндра, вызванном его продольными периодическими колебаниями [33].

В данной работе для модели Павловского [10] изучаются нестационарное слоистое движение со свободной границей и стационарное течение вблизи критической точки. Формулируются уравнения нестационарного пограничного слоя. Они содержат определяющий параметр – отношение характерной толщины пограничного слоя Прандтля к толщине релаксационного пограничного слоя. Ранее ламинарный стационарный пограничный слой в вязкоупругой жидкости при больших числах Рейнольдса исследовался в работах [34–36].

### Нестационарные слоистые течения со свободной границей

Математическая модель движения водных растворов полимеров, соответствующая закону состояния (2), имеет вид [10]

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \kappa \frac{d\Delta \mathbf{v}}{dt}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Здесь вместо  $\tilde{\kappa}$  введен параметр  $\kappa = \tilde{\kappa} / \rho$  – нормализованная релаксационная вязкость [32]. Пусть далее  $x, y$  обозначают декартовы координаты на плоскости, а  $u, v$  – соответствующие компоненты вектора скорости  $\mathbf{v}$ .

Рассмотрим неустановившееся слоистое течение в полосе, ограниченной снизу твердой стенкой  $y = 0$ , а сверху – параллельной ей свободной границей  $y = h, h = \text{const}$ . Ищем решение системы (3) в виде  $u = u(y, t), v = 0, p = p(y, t)$ , где функция  $u$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Для формулировки задачи в безразмерном виде выберем следующие единицы измерения: толщину слоя  $h$  – для расстояния,  $h^2 / \nu$  – для времени. В этих переменных функция  $u$  должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (4)$$

Здесь  $\gamma = \kappa / h^2$  – безразмерный параметр. На твердой стенке  $y = 0$  выполняется условие прилипания

$$u = 0. \quad (5)$$

На свободной границе  $y = 1$  кинематическое условие выполняется тождественно, а динамическое условие записывается в виде

$$\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  имеем

$$u = u_0(y). \quad (7)$$

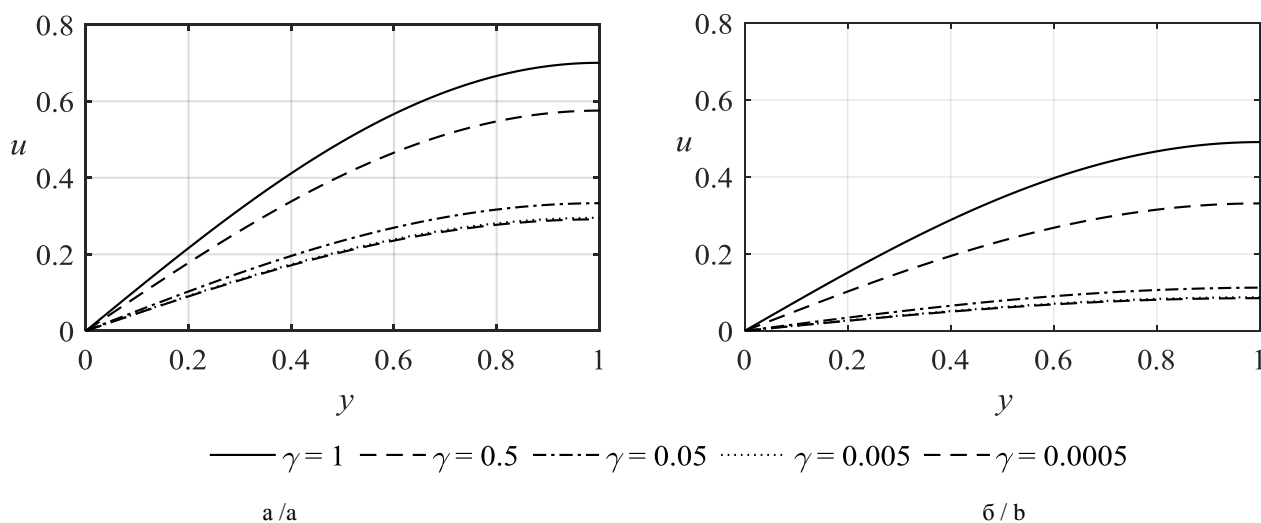
Задача (4)–(7) решалась численно при различных значениях функции  $u_0(y)$ . В качестве начальной выбиралась функция  $u_0(y) = c \sin(\pi y / 2)$ ,  $c$  – постоянная величина. На рис. 1 показано распределение функции  $u(y, t)$ , полученное для  $c = 1$  и различных значений параметра  $\gamma$ .

Заметим, что при  $\gamma = 0$  уравнение (4) преобразуется в уравнение теплопроводности, решение которого записывается в виде

$$u(y, t) = c \exp(-\pi^2 t / 4) \sin(\pi y / 2).$$

Вычисления показывают, что при малых  $\gamma$  решение задачи (4)–(7) близко к этому решению.



Рис. 1. Распределение функции  $u(y, t)$  при различных значениях параметра  $\gamma$  в моменты времени  $t=0,5$  (а) и  $t=1$  (б) /Fig. 1. Distribution of the function  $u(y, t)$  for different values of the parameter  $\gamma$  at the moments of time  $t=0.5$  (a) and  $t=1$  (b)

### Ламинарный пограничный слой в растворе полимера

Как уже отмечалось выше, эффект Томса [1] состоит в существенном увеличении критического числа Рейнольдса при внесении в воду небольшого количества растворимого полимера. Поэтому неудивительно, что именно турбулентный пограничный слой был в центре внимания тех, кто занимался проблемой ламинарно-турбулентного перехода и снижением сопротивления за счет полимерных добавок [2–12]. Что касается ламинарного пограничного слоя в водном растворе полимера, то публикаций на эту тему практически нет. Ниже выводятся уравнения ламинарного пограничного слоя в модели Павловского. Мы ограничимся случаем плоских движений.

В координатной записи уравнения импульса и неразрывности имеют вид

$$\begin{aligned} v_t + uv_x + vv_y &= \\ &= -p_y + \nu \Delta v + \kappa (\Delta v_t + u \cdot \Delta v_x + v \cdot \Delta v_y), \\ u_x + v_y &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа по переменным  $x$  и  $y$ . Уравнения системы (8) следует привести к безразмерному виду. При этом должно быть учтено неравноправие продольной координаты  $x$  и поперечной координаты  $y$  вместе с различием характерных масштабов продольной и поперечной компонент скорости:  $|u| > |v|$ . Тем самым исключается ситуация, когда  $u=0$  внутри области течения (за исключением твердой части границы, где выпол-

няется условие прилипания). Ниже предполагается, что функция  $u$  положительна.

В качестве характерного масштаба скорости  $V$  естественно ввести скорость набегающего потока, а за характерный продольный масштаб длины взять длину обтекаемого контура  $l$ . Тогда характерное время определится как  $l/V$ . Что касается характерного поперечного масштаба длины, то здесь имеются две возможности. В классической теории пограничного слоя длина определяется как  $b = \text{Re}^{-1/2} l$ , где  $\text{Re} = Vl/\nu > 1$  – число Рейнольдса. Но в обсуждаемой задаче есть еще один масштаб длины  $\lambda = \kappa^{1/2}$ . К сожалению, из работ Вейткунского и его учеников трудно извлечь информацию о величине параметра  $\lambda$ , но можно надеяться, что этот параметр является малым. Ниже именно этот параметр выбирается в качестве поперечного масштаба длины. Тогда переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам  $x = lx'$ ,  $y = \lambda y'$ ,  $t = V^{-1} lt'$ ,  $u = Vu'$ ,  $v = (\lambda/l)Vv'$ ,  $p = V^2 p'$ .

Далее верхний индекс у безразмерных величин опущен. В итоге получаются уравнения:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y &= -p_x + u_{yy} + uu_{yy} + \\ &+ vv_{yy} + \chi u_{yy} + \alpha (u_{txx} + uu_{xx} + vv_{xy} + \chi u_{xx}), \\ \alpha (v_t + uv_x + vv_y) &= -p_y + \alpha (v_{yy} + uv_{yy} + \chi v_{yy}) + \\ &+ \alpha^2 (v_{txx} + uv_{xx} + vv_{xy} + \chi v_{yy}), \\ u_x + v_y &= 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha = (\lambda/l)^2$ . Предельный переход в этой системе при  $\alpha \rightarrow 0$  приводит к уравнениям

$$u_t + uu_x + vu_y = -p_x + u_{yy} + uu_{yy} + vu_{yy} + \chi u_{yy}, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0. \quad (9)$$

В системе (9) имеется единственный безразмер-

ный параметр  $\chi = \frac{\nu l}{V\lambda^2} \equiv \frac{b^2}{\lambda^2}$ .

Он может оказаться малым за счет малости коэффициента  $\nu$  или больших значений величины  $V$ . При этом величина числа Рейнольдса не должна быть слишком большой, чтобы движение оставалось ламинарным. Важно подчеркнуть, что параметр  $\lambda$  не зависит от характеристик течения и определяется только реологическими свойствами, заложенными в модель водного раствора полимера.

Классической в теории пограничного слоя является задача Блазиуса об обтекании равномерным потоком прямолинейной пластинки под нулевым углом атаки [37]. Ниже рассматривается аналог этой задачи для системы (9), в которой следует положить  $u_t = v_t = 0, p_x = 0$ .

В полученных уравнениях

$$uu_x + vu_y = uu_{yy} + vu_{yy} + \chi u_{yy}, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \quad (10)$$

первое и третье образуют замкнутую систему. Для системы (10) ставятся краевые условия

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (11)$$

$$u \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq l,$$

где  $l$  – длина пластинки. Для замыкания постановки задачи требуется еще задать начальное условие по координате  $x$ , играющей роль эволюционной переменной,

$$u = u_0(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad y \geq 0, \quad (12)$$

где  $u_0$  – заданная функция  $y$ , такая что  $u_0(0) = 0, u_0 \rightarrow 1$  при  $y \rightarrow \infty$ .

В отличие от задачи Блазиуса система (10) с краевыми условиями (11) не имеет автомодельного решения (этому препятствует неизменность переменной  $y$  при сохраняющем систему (4) преобразовании растяжения  $x = cx', v = c^{-1}v', u = u'$ ). Тем не менее удастся привести эту задачу к более обозримому виду.

Перегруппируем в первом уравнении (10) ряд членов, приводя его к виду

$$u(u - u_{yy})_x + v(u - u_{yy})_y = \chi u_{yy}. \quad (13)$$

Обозначим через  $\psi$  функцию тока течения, так что  $u = \psi_y, v = -\psi_x$ , и введем вместо  $y$  новую независимую переменную  $\psi$  и новые искомые функции  $U(x, \psi) = u(x, y), W(x, \psi) = u - u_{yy}$ . Переход от переменных  $x, y$  к переменным  $x, \psi$  известен в теории пограничного слоя как преобразование Мизеса [37]. Вследствие соотношений

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \frac{\partial U}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( U \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = U \frac{\partial}{\partial \psi} \left( U \frac{\partial U}{\partial \psi} \right),$$

$$u(u - u_{yy})_x + v(u - u_{yy})_y =$$

$$= u \left( \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v u \frac{\partial W}{\partial \psi} = U \frac{\partial W}{\partial x}$$

уравнение (13) преобразуется к виду

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\chi}{2} \frac{\partial^2 (U^2)}{\partial \psi^2}. \quad (14)$$

Еще одно соотношение, связывающее функции  $U$  и  $W$ , имеет вид

$$\frac{U}{2} \frac{\partial^2 U^2}{\partial \psi^2} = U - W. \quad (15)$$

Из условий (11) следуют краевые условия для функции  $U$ :

$$U = 0, \psi = 0; \quad U \rightarrow 1, \psi \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (16)$$

Условие (12) порождает начальное условие для функции  $W$ ,

$$W = W_0(\psi), \quad x = 0, \quad \psi \geq 0, \quad (17)$$

где функция  $W_0(\psi)$  удовлетворяет условиям согласования.

В результате приходим к формулировке начально-краевой задачи в переменных Мизеса: найти функции  $U, W$ , удовлетворяющие уравнениям (14), (15) в полуполосе  $0 < x < l, \psi > 0$  и условиям (16), (17) на части ее границы. Решение этой задачи выходит за рамки данной статьи.

### Движение вблизи критической точки в модели Павловского

В стационарной модели Павловского (3) в результате стандартного для задач течения вблизи критической точки представления поля скоростей в виде  $u = xq'(y), v = -q(y)$  приходим к следующей краевой задаче для новой функции  $q(y)$ , записанной в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} & (q')^2 - q \cdot q'' - q''' - 1 = \\ & = \delta(q' \cdot q''' - q \cdot q^{IV}), \quad 0 < y < \infty, \\ & q(0) = q'(0) = 0, \quad q'(y) \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\delta = \kappa\beta/\nu$ , а  $\beta$  – постоянная размерности  $1/\text{с}$ . (В задаче о течении вблизи критической точки нет характерных масштабов времени и длины, но есть характерная скорость деформации на бесконечности. Она-то и принимается в качестве величины  $\beta$ . Тогда характерная скорость дается выражением  $V = (\nu\beta)^{1/2}$ , а характерный линейный размер –  $l = (\nu/\beta)^{1/2}$ ). Далее величина  $\delta$  предполагается малой.

Вводя новую функцию  $r(y) = 1 - q'(y)$ , приходим к следующей краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения с малым параметром [29]:

$$\begin{aligned} & r'' + r' \int_0^y (1 - r(s)) ds + r(r - 2) = \\ & = \delta \left( r''' \int_0^y (1 - r(s)) ds - r''(1 - r) \right), \quad y > 0; \\ & r(0) = 1, \quad r(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

В [29] доказана однозначная классическая разрешимость этой задачи при любых значениях параметра  $\delta$  из промежутка  $[0, 1]$ . Отмечено, что при  $\delta = 0$  решение совпадает с решением Хименца [37], описывающим плоское стационарное течение вязкой жидкости вблизи критической точки, а при  $\delta = 1$  решением является функция  $r(y) = \exp(-y)$ .

Помимо нелинейности, высокого порядка и неограниченности области, задача интересна «двойным вырождением» на границе  $y = 0$ : малый параметр стоит перед произведением старшей производной и интеграла от искомой функции, обращающегося в нуль на границе. Тем не менее удастся показать, что пограничный слой вблизи нуля отсутствует и решение задачи (19) можно найти в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра

$$r = r_0 + \delta r_1 + \dots + \delta^k r_k + \dots, \quad (20)$$

где  $r_0$  является решением задачи при  $\delta = 0$ ,

$$\begin{aligned} & r_0'' + r_0' \int_0^y (1 - r_0(s)) ds + r_0(r_0 - 2) = 0, \quad y > 0; \\ & r_0(0) = 1, \quad r_0(\infty) = 0. \end{aligned}$$

(решение Хименца [37]). Эта гипотеза была выдвинута в работе [27]. Там же можно найти некоторые численные результаты решения рассматриваемой задачи.

Для обоснования гипотезы выпишем задачи для определения функций  $r_k(y)$  из (20):

$$\begin{aligned} & r_k'' + r_k' \int_0^y (1 - r_0) ds - 2r_k(1 - r_0) - r_0' \int_0^y r_k ds = F_k, \\ & r_k(0) = r_k(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Правая часть  $F_k$  этого линейного интегро-дифференциального уравнения является суммой произведений функций  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ , их интегралов с переменным верхним пределом и производных до 3-го порядка включительно. Оказывается, что задача (21) для однородного уравнения имеет только тривиальное решение в подходящем банаховом пространстве функций, быстро убывающих на бесконечности [29]. Далее используется теорема Фредгольма.

Наконец, для доказательства представления решения задачи (19) в виде асимптотического ряда (20) показывается, что

$$\sup_{y \in [0, \infty)} \left| r(y) - \sum_{i=0}^k \delta^i r_i(y) \right| \leq \delta^{k+1} M_k, \quad \delta \rightarrow 0,$$

где постоянная  $M_k$  не зависит от  $\delta$  [30].

Представляет интерес рассмотрение другого предельного случая, когда значение параметра  $\delta$  велико. При заданных величинах  $\kappa$  и  $\nu$  это может быть достигнуто увеличением значения скорости деформации  $\beta$  на бесконечности.

Перепишем уравнение (18) в виде  $q(\delta q'' - q''') - q'(\delta q'' - q') = q''' + 1$ . Это уравнение эквивалентно следующей системе:

$$q''' - \frac{1}{\delta} q' = -s, \quad qs' = \left( q' + \frac{1}{\delta} \right) s - \frac{1}{\delta^2} q' - \frac{1}{\delta}. \quad (22)$$

К уравнению (22) присоединяются краевые условия

$$\begin{aligned} & q(0) = q'(0) = 0, \quad q'(y) \rightarrow 1, \quad y \rightarrow \infty, \\ & s(0) = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Предположим, что  $s' \rightarrow 0$ , когда  $y \rightarrow \infty$ . Тогда из (22), (23) следует, что  $s \rightarrow 1/\delta$ ,  $y \rightarrow \infty$ .

При заданном  $q(y)$  второе уравнение системы (22) относительно  $s$  решается в квадратурах. Это позволяет свести задачу (22), (23) к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению. Мы не

будем выписывать это уравнение вследствие его громоздкости, а заметим, что при заданной функции  $s(y)$  решение первого уравнения (22) с условиями (23) находится явно. В частности, если  $s = 1/\delta$ , то это решение имеет вид

$$\tilde{q} = y + \delta^{1/2} \exp(-\delta^{-1/2} y) - \delta^{1/2}. \quad (24)$$

Невязка при подстановке функции  $\tilde{q}$  в уравнение (18) дается формулой  $\Delta = (-1 + \delta^{-1}) \exp(-\delta^{-1/2} y)$ . Это позволяет называть функцию  $\tilde{q}$  приближенным решением задачи (18) при больших значениях величины  $\delta$ . В отличие от асимптотического решения задачи (18) при малых значениях  $\delta$ , где отсутствует пограничный слой, обусловленный релаксационными эффектами, здесь их проявление существенно в полосе с шириной порядка  $\delta^{1/2}$  при  $\delta \rightarrow \infty$ . Что касается асимптотики на бесконечности, то главные члены решения задачи (18) при  $\delta \rightarrow 0$  и функции  $\tilde{q}$  при  $\delta \rightarrow \infty$  совпадают. Однако существует различие в следующем члене. Асимптотика решения  $r_0$  задачи Хименца имеет вид [38]

$$r_0 = y - \eta + O[\exp(-y^2/2)], \quad y \rightarrow \infty,$$

где  $\eta \approx -0,65$ . В то же время второй член асимптотики функции  $\tilde{q}$  при больших значениях  $y$  есть  $-\delta^{1/2}$ , а остаточный член с ростом  $y$  убывает гораздо медленнее, чем в решении Хименца.

При умеренных значениях параметра  $\delta$  задача (18) решалась численно. Графики функции  $q'(y)$  при различных значениях  $\delta$  представлены на рис. 2.

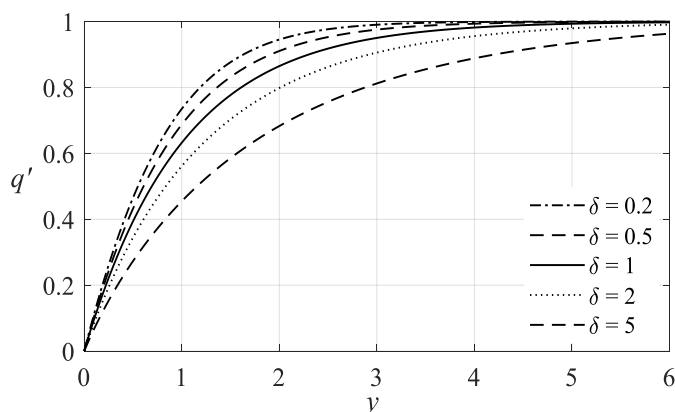


Рис. 2. Графики функции  $q'(y)$  при различных значениях параметра  $\delta$  / Fig. 2. Graphs of function  $q'(y)$  for different values of the parameter  $\delta$

## Заключение

1. Основные математические результаты в области моделирования движения растворов полимеров получены на основе уравнений Павловского и Ривлина – Эриксона. Неожиданное свойство этих моделей было обнаружено в работе [31]. Оказалось, что в слоистых течениях, описываемых этими моделями, существуют слабые разрывы. Вместе с тем в модели Войткунского – Амфилохиева – Павловского [9] с реологическим соотношением (1) такие разрывы мгновенно сглаживаются. Представляется актуальным изучение общих начально-краевых задач для этой модели.

2. Хотя математическое содержание моделей Павловского и Ривлина – Эриксона весьма сходно, картины описываемых ими течений могут заметно отличаться. Простой пример дает задача о стационарном движении раствора полимера в круглой трубе под действием постоянного градиента давления. Ее решение является аналогом классического решения Пуазейля в динамике вязкой жидкости. Оказывается, что в обеих упомянутых моделях скорость течения имеет одинаковый вид, однако имеются различия в распределении давления. В первой модели давление не зависит от поперечной координаты, а во второй такая зависимость появляется. Разность давлений на стенке трубы и на ее оси пропорциональна релаксационной вязкости  $K$  [31]. Этот пример показывает, что релаксационные свойства вязкоупругой жидкости могут проявляться даже в стационарных течениях.

3. Как и всякая модель механики сплошной среды, модели движения полимерных растворов содержат параметры, которые необходимо найти из экспериментов. Модели Павловского и жидкости второго порядка содержат, помимо плотности  $\rho$  и динамической вязкости  $\mu$ , еще один параметр – релаксационную вязкость  $\tilde{\kappa}$ . В модели работы [9] к ним добавляется время релаксации напряжений сдвига  $\theta$ .

Аномальные свойства водного раствора полимеров проявляются при его концентрациях порядка 0,5%. Поэтому естественно предположить, что надежно измеряемые значения параметров  $\rho, \mu, \theta$  меняются незначительно при добавлении в воду полимера. К сожалению, в работах [9–11] отсутствуют данные о прямых измерениях величины  $\tilde{\kappa}$ , но указывается достаточно широкий диапазон их возможных значений.

Представляется важным проведение эксперимента по определению ключевого параметра  $\tilde{\kappa}$  обсуждаемых моделей. В механике неньютоновских сред [13] важную роль играют точные реше-

ния соответствующих уравнений, допускающие экспериментальную реализацию. Мы надеемся, что точные решения уравнений трех указанных моделей, найденные в работах [31–33], могут быть использованы при организации такого эксперимента.

### Литература

1. *Toms B.A.* Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds number // *Proceedings of the First International Congress on Rheology*. Amsterdam, 1948. Vol. 2. P. 135–141.
2. *Gupta M.K., Metzner A.B., Hartnett J.P.* Turbulent heat-transfer characteristics of viscoelastic fluids // *Int. J. Heat Mass Transf.* 1967. Vol. 10. P. 1211–1224. DOI: 10.1016/0017-9310(67)90085-3.
3. *Баренблатт Г.И., Калашиков В.Н.* О влиянии надмолекулярных образований в разбавленных растворах полимеров на турбулентность // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1968. Вып. 3. С. 68–73.
4. *Barnes H.A., Townsend P., Walters K.* Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient // *Nature*. 1969. Vol. 224. P. 585–587. DOI: 10.1038/224585a0.
5. *Pisolkar V.G.* Effect of drag reducing additives on pressure loss across transitions // *Nature*. 1970. Vol. 225. P. 936–937. DOI: 10.1038/225936a0.
6. *Амфилохий В.Б., Павловский В.А.* Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при движении растворов полимеров в трубах // *Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та*. 1975. Т. 104. С. 3–5.
7. *Sadicoff B.L., Brandao E.M., Lucas E.F.* Rheological behaviour of poly (Acrylamide-G-propylene oxide) solutions: effect of hydrophobic content, temperature and salt addition // *Int. J. Polym. Mater.* 2000. Vol. 47. P. 399–406. DOI: 10.1080/00914030008035075.
8. *Fu Z., Otsuki T., Motozawa M., Kurosawa T., Yu B., Kawaguchi Y.* Experimental investigation of polymer diffusion in the drag-reduced turbulent channel flow of inhomogeneous solution // *Int. J. Heat. Mass. Trans.* 2014. Vol. 77. P. 860–873. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.06.016.
9. *Войткунский Я.И., Амфилохий В.Б., Павловский В.А.* Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств // *Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та*. 1970. Т. 69. С. 19–26.
10. *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // *Докл. АН СССР*. 1971. Т. 200, № 4. С. 809–812.
11. *Амфилохий В.Б., Войткунский Я.В., Мазаева Н.П., Ходорковский Я.С.* Течения растворов полимеров под действием конвективного ускорения // *Тр. Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного ин-та*. 1975. Т. 96. С. 3–9.
12. *Han W.J., Dong Y.Z., Choi H.J.* Applications of water-soluble polymers in turbulent drag reduction // *Processes*. 2017. Vol. 5. P. 24. DOI: 10.3390/pr5020024.
13. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 300 с.
14. *Rivlin R.S., Ericksen J.L.* Stress-deformation relations for isotropic materials // *J. Ration. Mech. Anal.* 1955. Vol. 4. P. 323–425. DOI: 10.1512/iumj.1955.4.54011.
15. *Fosdick R.L., Rajagopal K.R.* Anomalous features in the model of “second order fluids” // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1979. Vol. 70. P. 145–152. DOI: 10.1007/BF00250351.
16. *Galdi G.P., Grobelaar-Van Dalsen M., Sauer N.* Existence and uniqueness of classical solutions of equations of motion for second-grade fluids // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1993. Vol. 124. P. 221–237. DOI: 10.1007/BF00953067.
17. *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence // *Phys. D: Nonlinear Phenom.* 2001. Vol. 152–153. P. 505–519. DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00191-9.
18. *Ilyin A.A., Lunasin E., Titi E.S.* A modified-Leray- $\alpha$  subgrid scale model of turbulence // *Nonlinearity*. 2006. Vol. 19. P. 879–897. DOI: 10.1088/0951-7715/19/4/006.
19. *Осколков А.П.* О единственности и разрешимости краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров // *Записки науч. семинаров ЛОМИ*. 1973. Т. 38. С. 98–136.
20. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкости Кельвина – Фойгта // *Записки научных семинаров ЛОМИ*. 1982. Т. 115. С. 191–202.
21. *Осколков А.П.* Начальные краевые задачи с условиями скольжения для модифицированных уравнений Навье – Стокса // *Записки научных семинаров ПОМИ*. 1995. Т. 213. С. 93–115.
22. *Звягин А.В.* Исследование разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров // *Вестн. Воронежского гос. ун-та. Физика. Математика*. 2011. Вып. 1. С. 147–156.
23. *Zvyagin A.V.* Solvability for equations of motion of weak aqueous polymers solutions with objective derivative // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*. 2013. Vol. 90. P. 70–85.
24. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД, 2012. 412 с.
25. *Le Roux C.* Existence and Uniqueness of the Flow of Second-Grade Fluids with Slip Boundary Conditions // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1999. Vol. 148. P. 309–356. DOI: 10.1007/s002050050164.
26. *Божков Ю.Д., Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений движения водных растворов полимеров // *Докл. РАН*. 2015. Т. 460, № 5. С. 536–539.
27. *Bozhkov Yu.D., Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P.* Mathematical models of polymer solutions motion and

their symmetries // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1684. P. 020001. DOI: 10.1063/1.4934282.

28. Пухначева Т.П. Задача об осесимметричном течении водного раствора полимера вблизи критической точки // Тр. семинара по геометрии и математическому моделированию. 2016. Вып. 2. С. 75–80.

29. Петрова А.Г. Об однозначной разрешимости задачи течения водного раствора полимера вблизи критической точки // Мат. заметки. 2019. Т. 106, № 5. С. 723–735. DOI: 10.4213/mzm12272.

30. Петрова А.Г. Обоснование асимптотического разложения решения задачи течения водного раствора полимеров вблизи критической точки // Сиб. электр. мат. известия. 2020. Т. 17. С. 313–317. DOI: 10.33048/semi.2020.17.020.

31. Пухначев В.В., Фроловская О.А. О модели Войткунского – Амфилохиева – Павловского движения водных растворов полимеров // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 2018. Т. 300. С. 176–189. DOI: 10.1134/S0371968518010144.

32. Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. Analysis of the Models of Motion of Aqueous Solutions of Polymers on the Basis of Their Exact Solutions // Polymers. 2018. Vol. 10. P. 684. DOI: 10.3390/polym10060684.

33. Pukhnacheva T.P. Stokes problem for second-order fluid // AIP Conf. Proc. 2019. Vol. 2164. P. 050004. DOI: 10.1063/1.5130802.

34. Sadeghy K., Khabazi N., Taghavi S.M. The Boundary Layer Flows of a Rivlin-Ericksen Fluid // New Trends in Fluid Mechanics Research. Zhuang F.G., Li J.C. (Eds.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. DOI: 10.1007/978-3-540-75995-9\_190.

35. Sadeqi S., Khabazi N., Sadeghy K. Blasius flow of thixotropic fluids: A numerical study // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2011. Vol. 16. P. 711–721. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.05.009.

36. Ahmadpour A., Sadeghy K. Swirling flow of Bingham fluids above a rotating disk: An exact solution // J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2013. Vol. 197. P. 41–47. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2013.03.001.

37. Шлихтин Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

38. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 760 с.

## References

1. Toms B.A. (1948). Some observations on the flow of linear polymer solutions through straight tubes at large Reynolds numbers. *Proc. First Int. Congr. Rheol.*, vol. 2, pp. 135-141.

2. Gupta M.K., Metzner A.B., Hartnett J.P. (1967). Turbulent heat-transfer characteristics of viscoelastic fluids. *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 10, pp. 1211-1224. DOI: 10.1016/0017-9310(67)90085-3.

3. Barenblatt G.I., Kalashnikov V.N. (1968). Effect of high-molecular formations on turbulence in dilute polymer solutions. *Fluid Dyn.*, vol. 3, pp. 45-48. DOI: 10.1007/BF01019897.

4. Barnes H.A., Townsend P., Walters K. (1969). Flow of non-Newtonian liquids under a varying pressure gradient. *Nature*, vol. 224, pp. 585-587. DOI: 10.1038/224585a0.

5. Pisolkar V.G. (1970). Effect of drag reducing additives on pressure loss across transitions. *Nature*, vol. 225, pp. 936-937. DOI: 10.1038/225936a0.

6. Amfilokhiev V.B., Pavlovskii V.A. (1976). Experimental data on laminar-turbulent transition for flows of polymer solutions in pipes. *Tr. Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta*, vol. 104, pp. 3-5. (in Russian).

7. Sadicoff B.L., Brandao E.M., Lucas E.F. (2000). Rheological behaviour of poly (Acrylamide-G-propylene oxide) solutions: Effect of hydrophobic content, temperature and salt addition. *Int. J. Polym. Mater.*, vol. 47, pp. 399-406. DOI: 10.1080/00914030008035075.

8. Fu Z., Otsuki T., Motozawa M., Kurosawa T., Yu B., Kawaguchi Y. (2014). Experimental investigation of polymer diffusion in the drag-reduced turbulent channel flow of inhomogeneous solution. *Int. J. Heat. Mass. Transf.*, vol. 77, pp. 860-873. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.06.016.

9. Voitkunsii Y.I., Amfilokhiev V.B., Pavlovskii V.A. (1970). Equations of motion of a fluid, with its relaxation properties taken into account. *Tr. Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta*, vol. 69, pp. 19-26. (in Russian).

10. Pavlovskii V.A. (1971). Theoretical description of weak aqueous polymer solutions. *Dokl. AN SSSR*, vol. 200, pp. 809-812. (in Russian).

11. Amfilokhiev V.B., Pavlovskii V.A., Mazaeva N.P., Khodorkovskii Y.S. (1975). Flows of polymer solutions in the presence of convective accelerations. *Tr. Leningradskogo ordena Lenina korablestroitel'nogo instituta*, vol. 96, pp. 3-9. (in Russian).

12. Han W.J., Dong Y.Z., Choi H.J. (2017). Applications of water-soluble polymers in turbulent drag reduction. *Processes*, vol. 5, p. 24. DOI: 10.3390/pr5020024.

13. Astarita G., Marrucci G. (1978). *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. Moscow, Mir Publ., 300 p. (in Russian).

14. Rivlin R.S., Ericksen J.L. (1955). Stress-deformation relations for isotropic materials. *J. Ration. Mech. Anal.*, vol. 4, pp. 323-425. DOI: 10.1512/iumj.1955.4.54011.

15. Fosdick R.L., Rajagopal K.R. (1979). Anomalous features in the model of "second order fluids". *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 70, pp. 145-152. DOI: 10.1007/BF00250351.

16. Galdi G.P., Grobelaar-Van Dalsen M., Sauer N. (1993). Existence and uniqueness of classical solutions of equations of motion for second-grade fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 124, pp. 221-237. DOI: 10.1007/BF00953067.

17. Foias C., Holm D.D., Titi E.S. (2001). The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence. *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, vol. 152-153, pp. 505-519. DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00191-9.
18. Ilyin A.A., Lunasin E., Titi E.S. (2006). A modified-Leray- $\alpha$  subgrid scale model of turbulence. *Nonlinearity*, vol. 19, pp. 879-897. DOI: 10.1088/0951-7715/19/4/006.
19. Oskolkov A.P. (1973). On the uniqueness and global solvability of boundary-value problems for the equations of motion of aqueous solutions of polymers. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 38, pp. 98-136. (in Russian).
20. Oskolkov A.P. (1982). Theory of nonstationary flows of Kelvin-Voigt fluids. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 115, pp. 191-202. (in Russian).
21. Oskolkov A.P. (1995). Initial boundary-value problems with a free surface condition for the modified Navier-Stokes equations. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol. 213, pp. 93-115. (in Russian).
22. Zvyagin A.V. (2011). Analysis of the solvability of a stationary model of motion of weak aqueous polymer solutions. *Vestn. Voronezhskogo gos. un-ta. Fizika. Matematika*, no. 1, pp. 147-156. (in Russian).
23. Zvyagin A.V. (2013). Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, vol. 90, pp. 70-85. DOI: 10.1016/j.na.2013.05.022.
24. Zvyagin V.G., Turbin M.V. (2012). *Mathematical problems of hydrodynamics of viscoelastic media*. Moscow, KRASAND Publ., 412 p. (in Russian).
25. Le Roux C. (1999). Existence and Uniqueness of the Flow of Second-Grade Fluids with Slip Boundary Conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 148, pp. 309-356, DOI: 10.1007/s002050050164.
26. Bozhkov Yu.D., Pukhnachev V.V. (2015). Group analysis of equations of motion of aqueous solutions of polymers. *Dokl. Phys.*, vol. 60, pp. 77-80. DOI: 10.1134/S1028335815020068.
27. Bozhkov Yu.D., Pukhnachev V.V., Pukhnacheva T.P. (2015). Mathematical models of polymer solutions motion and their symmetries. *AIP Conf. Proc.*, vol. 1684, p. 020001. DOI: 10.1063/1.4934282.
28. Pukhnacheva T.P. (2016). Problem of axially symmetric flow of an aqueous polymer solution near the critical point. *Tr. seminarov po geometrii i matematicheskomu modelirovaniyu*, no. 2, pp. 75-80. (in Russian).
29. Petrova A.G. (2019). On the unique solvability of the problem of the flow of an aqueous solution of polymers near a critical point. *Mathematical Notes*, vol. 106, no. 5, pp. 784-793. DOI: 10.1134/S0001434619110117.
30. Petrova A.G. (2020). Justification of asymptotic decomposition of a solution for the problem of the motion of weak solutions of polymers near a critical point. *Sib. elektr. mat. izvestiya*, vol. 17, pp. 313-317. DOI: 10.33048/semi.2020.17.020. (in Russian).
31. Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. (2018). On the Voigtunskii-Amfilokhiev-Pavlovskii model of motion of aqueous polymer solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, vol. 300, pp. 168-181. DOI: 10.1134/S0081543818010145.
32. Frolovskaya O.A., Pukhnachev V.V. (2018). Analysis of the Models of Motion of Aqueous Solutions of Polymers on the Basis of Their Exact Solutions. *Polymers*, vol. 10, p. 684. DOI: 10.3390/polym10060684.
33. Pukhnacheva T.P. (2019). Stokes problem for second-order fluid. *AIP Conf. Proc.*, vol. 2164, p. 050004. DOI: 10.1063/1.5130802.
34. Sadeghy K., Khabazi N., Taghavi S.M. (2007). The Boundary Layer Flows of a Rivlin-Ericksen Fluid. *New Trends in Fluid Mechanics Research*. Zhuang F.G., Li J.C. (Eds.). Berlin, Heidelberg, Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-75995-9\_190.
35. Sadeqi S., Khabazi N., Sadeghy K. (2011). Blasius flow of thixotropic fluids: A numerical study. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, vol. 16, pp. 711-721. DOI: 10.1016/j.cnsns.2010.05.009.
36. Ahmadpour A., Sadeghy K. (2013). Swirling flow of Bingham fluids above a rotating disk: An exact solution. *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 197, pp. 41-47. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2013.03.001.
37. Schlichting G. (1974). *Theory of the boundary layer*. Moscow, Nauka Publ., 712 p. (in Russian).
38. Bachelor J. (1973). *Introduction to fluid dynamics*. Moscow, Mir Publ., 760 p. (in Russian).

УДК 519.6

DOI 10.18522/1026-2237-2020-2-94-100

## КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА, СОДЕРЖАЩЕГО ВЕСОВУЮ ФУНКЦИЮ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

© 2020 г. А.В. Саакян<sup>1</sup><sup>1</sup>Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Армения

## A QUADRATURE FORMULA FOR A HYPERSINGULAR INTEGRAL CONTAINING THE WEIGHT FUNCTION OF JACOBI POLYNOMIALS WITH COMPLEX EXPONENTS

A.V. Sahakyan<sup>1</sup><sup>1</sup>Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia

Саакян Аветик Варздатович – доктор физико-математических наук, заместитель директора, Институт механики Национальной академии наук Республики Армения, пр. Маршала Баграмяна, 24б, г. Ереван, 0019, Республика Армения, e-mail: avсахакян@gmail.com

Avetik V. Sahakyan - Doctor of Physics and Mathematics, Deputy Director, Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Marshal Baghramyan Ave., 24b, Yerevan, 0019, Republic of Armenia, e-mail: avсахакян@gmail.com

Понятие гиперсингулярного интеграла (ГИ) хотя и введено Адамаром еще в начале XX в., но начало его практическому применению было положено лишь во второй половине века. Широко же развитие теория гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) получила в последние десятилетия. Это обусловлено тем, что ими описываются определяющие уравнения многих прикладных задач в различных областях: теории упругости, механике разрушения, теории дифракции волн, электродинамике, ядерной физике, геофизике, теории вибраторных антенн, аэродинамике и др.

Вычисление ГИ аналитически возможно осуществить лишь для очень узкого класса функций, поэтому приближенные методы вычисления такого интеграла всегда находятся в поле зрения исследователей и являются бурно развивающимся направлением вычислительной математики. Есть очень большое количество работ, посвященных этой тематике. В них предлагаются различные подходы как к приближенному вычислению ГИ, так и к решению ГИУ, главным образом с учетом специфики поведения плотности ГИ.

В настоящей работе получены квадратурные формулы для ГИ, плотностью которого является произведение гильбертовской на отрезке  $[-1, 1]$  функции и весовой функции полиномов Якоби  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ . При этом полагается, что показатели  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть произвольными комплексными числами, удовлетворяющими условию неотрицательности вещественной части. На численных примерах продемонстрирована сходимость квадратурной формулы к точному значению ГИ. Указана возможность применения метода механических квадратур к решению разных интегральных уравнений, в том числе и ГИУ.

**Ключевые слова:** гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, весовая функция, многочлен Якоби, метод механических квадратур.

Although the concept of a hypersingular integral was introduced by Hadamard at the beginning of the 20th century, it began to be put into practical use only in the second half of the century. The theory of hypersingular integral equations has been widely developed in recent decades and this is due to the fact that they describe the governing equations of many applied problems in various fields: elasticity theory, fracture mechanics, wave diffraction theory, electrodynamics, nuclear physics, geophysics, theory vibrator antennas, aerodynamics, etc.

It is analytically possible to calculate the hypersingular integral only for a very narrow class of functions; therefore, approximate methods for calculating such an integral are always in the field of view of researchers and are a rapidly developing area of computational mathematics. There are a very large number of papers devoted to this subject, in which various approaches are proposed both to approximate calculation of the hypersingular integral and to the solution of hypersingular integral equations, mainly taking into account the specifics of the behavior of the density of the hypersingular integral.



In this paper, quadrature formulas are obtained for a hypersingular integral whose density is the product of the Hölder continuous function on the closed interval  $[-1, 1]$ , and weight function of the Jacobi polynomials  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ . It is assumed that the exponents  $\alpha$  and  $\beta$  can be arbitrary complex numbers that satisfy the condition of non-negativity of the real part. The numerical examples show the convergence of the quadrature formula to the true value of the hypersingular integral. The possibility of applying the mechanical quadrature method to the solution of various, including hypersingular, integral equations is indicated.

**Keywords:** hypersingular integral, quadrature formula, weight function, Jacobi polynomial, mechanical quadrature method.

## Введение

Широкое развитие теории гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ) в последние десятилетия обусловлено тем, что ими описываются определяющие уравнения многих прикладных задач в различных областях: теории упругости, механике разрушения, теории дифракции волн, теории вибраторных антенн, аэродинамике и др. [1–4]. За редким исключением, решение этих уравнений строится приближенными методами, развитию которых посвящено очень много работ, в частности [5–12]. Следует отметить, что подавляющее большинство работ относится к наиболее распространенному частному случаю, когда поведение плотности сингулярного или гиперсингулярного интеграла (ГИ) у концов отрезка интегрирования описывается корневой функцией. Существенно меньше число работ, посвященных приближенному вычислению указанных интегралов, плотности которых содержат весовую функцию многочленов Якоби с произвольными допустимыми вещественными показателями. В [13] приведены квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные.

В настоящей работе строятся интерполяционные квадратурные формулы для ГИ при предположении, что его плотность содержит множителем весовую функцию Якоби с произвольными, в том числе и комплексными, допустимыми показателями.

## Вывод квадратурной формулы

Рассмотрим интеграл

$$J_0(z) = \int_{-1}^1 \frac{\Phi(x)}{(x-z)^2} dx, \quad z \in C, \quad z \neq \pm 1,$$

который при  $z \in (-1, 1)$  понимается в смысле конечного значения по Адамару [14]

$$J_0(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-1}^{z-\varepsilon} \frac{\Phi(x)}{(x-z)^2} dx + \int_{z+\varepsilon}^1 \frac{\Phi(x)}{(x-z)^2} dx - \frac{2\Phi(z)}{\varepsilon} \right]. \quad (1)$$

Интегрируя интегралы в (1) по частям и устремляя  $\varepsilon$  к нулю, приходим к соотношению

$$J_0(z) = -\frac{\Phi(1)}{1-z} - \frac{\Phi(-1)}{1+z} + \int_{-1}^1 \frac{\Phi'(x)}{x-z} dx. \quad (2)$$

Интеграл  $J_0(z)$  можно понимать как результат формального интегрирования по частям, и следовательно, вычисление ГИ сведётся к вычислению интеграла

$$I(z) = \int_{-1}^1 \frac{\Phi'(x)}{x-z} dx. \quad (3)$$

Предположим, что

$$\Phi(x) = \varphi(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \text{Re}(\alpha), \text{Re}(\beta) \geq 0, \quad (4)$$

$\varphi(x)$  – гёльдеровская функция на замкнутом отрезке  $[-1, 1]$ .

Заменяя функцию  $\varphi(x)$  интерполяционным многочленом

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{(x - \xi_j) P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)},$$

для  $\Phi(x)$  будем иметь

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j) P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{(x - \xi_j) P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_j)} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,$$

где  $\xi_j, j = \overline{1, n}$ , – корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Они в общем случае будут комплексными. Возникает вопрос, что понимать под  $\varphi(\xi_j), j = \overline{1, n}$ , если функция  $\varphi(x)$  определена на отрезке  $[-1, 1]$ . В случае, если  $\varphi(x)$  аналитически продолжается в комплексную плоскость,  $\varphi(\xi_j)$  будут значениями этой функции, в противном случае – многочлена порядка  $(n-1)$ , интерполирующего функцию  $\varphi(x)$  по узлам на отрезке  $[-1, 1]$ .

Поскольку интерполяционный многочлен  $\varphi_n(x)$  по сути является многочленом порядка  $n-1$ , то в случае, если  $\varphi(x)$  будет многочленом порядка  $m < n$ , будем иметь  $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x)$ .

Вычисление производной функции  $\Phi(x)$  зависит от значений  $\alpha$  и  $\beta$ , и поэтому, не вдаваясь в подробности вычисления, выпишем эти значения:

при  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$\Phi'(x) = -(1-x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1} \times \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)} \left[ \frac{2(n+1)P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)}{x-\xi_j} + (1-x^2) \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2} \right]; \quad (5)$$

при  $\alpha = 0, \beta \neq 0$

$$\Phi'(x) = \frac{2(1+x)^{\beta-1}}{n+\beta+1} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(1,\beta+1)}(\xi_j)} \times \left[ \frac{(n+\beta)P_n^{(1,\beta-1)}(x)}{x-\xi_j} - (1+x) \frac{P_n^{(0,\beta)}(x)}{(x-\xi_j)^2} \right]; \quad (6)$$

при  $\beta = 0, \alpha \neq 0$

$$\Phi'(x) = -\frac{2(1-x)^{\alpha-1}}{n+\alpha+1} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,1)}(\xi_j)} \times \left[ \frac{(n+\alpha)P_n^{(\alpha-1,1)}(x)}{x-\xi_j} + (1-x) \frac{P_n^{(\alpha,0)}(x)}{(x-\xi_j)^2} \right]; \quad (7)$$

при  $\alpha = 0, \beta = 0$

$$\Phi'(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(1,1)}(\xi_j)} \left[ \frac{(n+1)P_{n-1}^{(1,1)}(x)}{2(x-\xi_j)} - \frac{P_n(x)}{(x-\xi_j)^2} \right]. \quad (8)$$

Вернемся к построению квадратурной формулы для интеграла  $I(z)$ . Подставляя каждую  $\Phi'(x)$  из представлений (5)–(8) в интеграл (3), меняя порядок интегрирования и суммирования, пользуясь разложениями

$$\frac{1}{(x-z)(x-\xi_j)} = \left[ \frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\xi_j} \right] \frac{1}{z-\xi_j},$$

$$\frac{1}{(x-z)(x-\xi_j)^2} = \frac{1}{(z-\xi_j)^2} \left[ \frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-\xi_j} \right] - \frac{1}{(z-\xi_j)(x-\xi_j)^2},$$

после определенных упрощений придем к следующим квадратурным формулам:

при  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$I(z) \approx I_n(z) = -\sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)} \left[ \frac{2(n+1)}{z-\xi_j} R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z) + \frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z) - R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2} \right]; \quad (9)$$

при  $\alpha = 0, \beta \neq 0$

$$I(z) \approx I_n(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_n^{(0,\beta)}(\xi_j)} \left\{ \frac{-2^\beta}{(1-\xi_j)(z-1)} - (n+\beta) \frac{R_n^{(1,\beta-1)}(z)}{(z-\xi_j)(z-1)} - \frac{R_n^{(0,\beta)}(z) - R_n^{(0,\beta)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2} \right\}; \quad (10)$$

при  $\alpha \neq 0, \beta = 0$

$$I(z) \approx I_n(z) = \frac{2}{n+\alpha+1} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{P_{n-1}^{(\alpha+1,1)}(\xi_j)} \left\{ \frac{-2^\alpha}{(1+\xi_j)(z+1)} - (n+\alpha) \frac{R_n^{(\alpha-1,1)}(z)}{(z-\xi_j)(z+1)} - \frac{R_n^{(\alpha,0)}(z) - R_n^{(\alpha,0)}(\xi_j)}{(z-\xi_j)^2} \right\}; \quad (11)$$

при  $\alpha = 0, \beta = 0$

$$I(z) \approx I_n(z) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)}{(z-\xi_j)P_{n-1}^{(1,1)}(\xi_j)} \left[ \frac{n+1}{2} \frac{R_{n-1}^{(1,1)}(z)}{1-z^2} - \frac{R_n^{(0,0)}(z) - R_n^{(0,0)}(\xi_j)}{z-\xi_j} + \frac{z-\xi_j}{(1-z)(1-\xi_j)} \left[ 1 - (-1)^n + \frac{2(-1)^n(z+\xi_j)}{(1+z)(1+\xi_j)} \right] \right]; \quad (12)$$

где  $R_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{x-z} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx$ .

Функция  $R_n^{(\alpha,\beta)}(z)$  тесно связана с функцией

Якоби второго рода  $Q_n(z)$ ,  $Q_n(z) = \frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{2(z-1)^\alpha (z+1)^\beta}$ ,

и определена во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка  $[-1,1]$ . Она имеет множество различных представлений [15], из которых представим только одно:

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(z) = -\left(\frac{2}{z-1}\right)^{n+1} 2^{\alpha+\beta} B(n+\alpha+1, n+\beta+1) \times \\ \times F\left[n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right].$$

Здесь  $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$  – известная бета-

функция;  $F(a,b;c;z)$  – гипергеометрический ряд [15].

Отметим, что функция  $R_n^{(\alpha,\beta)}(z)$  принимает различные значения в зависимости от того, стремится ли точка  $z$  к точке  $\xi$  разреза из верхней полуплоскости  $(\xi + i0)$  или из нижней  $(\xi - i0)$ . На самом разрезе функция  $R_n^{(\alpha,\beta)}(z)$  определяется как полу-сумма этих значений:

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \frac{1}{2} [R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi + i0) + R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi - i0)],$$

$$-1 < \xi < 1.$$

При необходимости вычисления интеграла  $I(z)$  в узловой точке  $z = \xi_m$ ,  $m=1, n$ , следует в соответствующем слагаемом соответствующей квадратурной формулы использовать предельные значения:

при  $\alpha \neq 0$  и  $\beta \neq 0$

$$\lim_{z \rightarrow \xi_m} \left[ \frac{2(n+1)}{z-\xi_m} R_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(z) + \frac{R_n^{(\alpha,\beta)}(z) - R_n^{(\alpha,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_n^{(\alpha,\beta)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=\xi_m};$$

при  $\alpha = 0$

$$\lim_{z \rightarrow \xi_m} \left[ (n+\beta) \frac{R_n^{(1,\beta-1)}(z)}{(z-\xi_m)(z-1)} + \frac{R_n^{(0,\beta)}(z) - R_n^{(0,\beta)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_n^{(0,\beta)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=\xi_m};$$

при  $\beta = 0$

$$\lim_{z \rightarrow \xi_m} \left[ (n+\alpha) \frac{R_n^{(\alpha-1,1)}(z)}{(z-\xi_m)(z+1)} + \frac{R_n^{(\alpha,0)}(z) - R_n^{(\alpha,0)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_n^{(\alpha,0)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=\xi_m};$$

при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 0$

$$\lim_{z \rightarrow \xi_m} \left[ -\frac{1}{2} \frac{(n+1)R_{n-1}^{(1,1)}(z)}{(z-\xi_m)(1-z^2)} + \frac{R_n^{(0,0)}(z) - R_n^{(0,0)}(\xi_m)}{(z-\xi_m)^2} \right] = \\ = -\frac{1}{2} \frac{d^2 R_n^{(0,0)}(z)}{dz^2} \Big|_{z=\xi_m}.$$

Представление функции  $\Phi(x)$  в виде (4) делает очевидным тот факт, что, за исключением случаев  $\alpha = 0, \varphi(1) \neq 0, \beta = 0, \varphi(-1) \neq 0$  или  $\alpha = \beta = 0$  и  $\varphi(\pm 1) \neq 0$ , функции  $J_0(z)$  и  $I(z)$  равны друг другу, и для них применима квадратурная формула (9). В исключенных же случаях функция  $I(z)$  вычисляется по квадратурным формулам (10)–(12), а  $J_0(z)$  определяется посредством формулы (2).

Заметим, что формулу (9) можно встретить и в работах [16, 17].

### Наиболее часто встречающийся частный случай

Решения смешанных и контактных задач математической теории упругости для однородных сред в большинстве своем имеют корневое поведение у точек раздела граничных условий, т.е.  $\alpha = \pm\beta = \pm 0,5$ . Учитывая наличие условия в (4), следует положить  $\alpha = \beta = 0,5$ . Тогда для рассматриваемой функции (4) будем иметь  $\Phi(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ , а квадратурная формула (9) примет вид

$$I(z) \approx I_n(z) = \\ = -\pi \sum_{j=1}^n \frac{\varphi(\xi_j)(1-\xi_j^2)}{U_{n-1}(\xi_j)(z-\xi_j)} \left[ U_n(z) - \frac{T_{n+1}(z) - T_{n+1}(\xi_j)}{(n+1)(z-\xi_j)} \right], \\ \xi_j = \cos \frac{j\pi}{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При вычислении интеграла  $I(z)$  в узловой точке  $z = \xi_m$ ,  $m = 1, n$ , следует квадратную скобку в соответствующем слагаемом заменить выражением

$$\left[ \frac{n+1}{z - \xi_j} U_n(z) - \frac{T_{n+1}(z) - T_{n+1}(\xi_j)}{(z - \xi_j)^2} \right]_{z=\xi_m} = \frac{(n+1)^2 U_{n-1}(\xi_m)}{2(1 - \xi_m^2)}.$$

### Численный анализ

Проведем численный анализ сходимости квадратурной формулы (6) в зависимости от показателей  $\alpha$  и  $\beta$ . В качестве функции  $\varphi(x)$  выберем  $\varphi(x) = \sin 2x + \ln(2+x)$ , которая аналитически продолжается в комплексную плоскость. Поскольку главным образом будут рассматриваться комплексные значения этих показателей, то для сравнения будут вычислены не только отклонения квадратурной формулы, но и отклонение интерполирующего многочлена.

Для оценки близости интерполирующего многочлена (4) к рассматриваемой функции используем понятие среднеквадратического отклонения непрерывных функций, определяемое формулой

$$\Delta_f = \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - \varphi_n(x))^2 dx}, \text{ а для близости интеграла } J_0(z), \text{ вычисленного при помощи стандартных программ и квадратурной суммы } I_n(z), \text{ используем формулу, учитывающую разницу в } m \text{ равноотстоящих друг от друга внутренних точек интервала } (-1,1), \Delta_{\text{int}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (J_0(x_i) - I_n(x_i))^2};$$

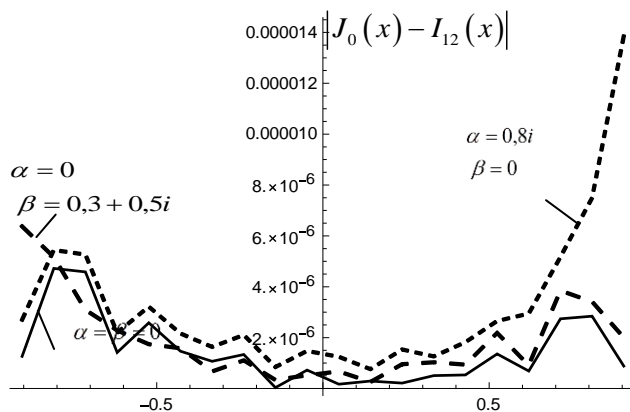
$$x_i = -1 + i \frac{2}{m+1}.$$

С учетом того, что при комплексных значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$  оба отклонения будут комплексными, в таблице приведены их модули при разных порядках аппроксимации  $n$  и различных, отличных от нуля значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Для случаев, когда один из показателей или оба они равны нулю, на рисунке приведены кривые, соединяющие абсолютные значения разности интеграла  $J_0(z)$  и соответствующей значениям  $\alpha$  и  $\beta$  квадратурной суммы  $I_n(z)$ , рассчитанной при  $n = 12$ ,  $m = 20$ .

Среднеквадратические отклонения  $|\Delta_f|$  и  $|\Delta_{\text{int}}|$  / Standard deviations  $|\Delta_f|$  and  $|\Delta_{\text{int}}|$

n	Отклонение	$\alpha = 0,15,$ $\beta = 0,65$	$\alpha = 0,3 + 0,2i,$ $\beta = 0,5 - 2i$	$\alpha = 0,25i,$ $\beta = 4i$	$\alpha = 0,25,$ $\beta = 0,5i$	$\alpha = i,$ $\beta = i$
8	$ \Delta_f $	$3,0 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-3}$	$1,0 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-4}$	$1,7 \times 10^{-4}$
	$ \Delta_{\text{int}} $	$5,4 \times 10^{-3}$	$2,6 \times 10^{-2}$	$9,8 \times 10^{-1}$	$6,9 \times 10^{-3}$	$1,2 \times 10^{-2}$
10	$ \Delta_f $	$6,1 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^{-5}$	$2,5 \times 10^{-4}$	$4,5 \times 10^{-6}$	$3,3 \times 10^{-6}$
	$ \Delta_{\text{int}} $	$1,4 \times 10^{-4}$	$6,6 \times 10^{-4}$	$2,7 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-4}$	$3,1 \times 10^{-4}$
12	$ \Delta_f $	$1,3 \times 10^{-7}$	$4,7 \times 10^{-7}$	$4,7 \times 10^{-6}$	$6,7 \times 10^{-8}$	$5,8 \times 10^{-8}$
	$ \Delta_{\text{int}} $	$1,5 \times 10^{-6}$	$1,6 \times 10^{-5}$	$5,6 \times 10^{-4}$	$2,2 \times 10^{-6}$	$5,6 \times 10^{-6}$
13	$ \Delta_f $	$7,7 \times 10^{-8}$	$1,6 \times 10^{-7}$	$1,2 \times 10^{-6}$	$4,8 \times 10^{-8}$	$4,3 \times 10^{-8}$
	$ \Delta_{\text{int}} $	$1,2 \times 10^{-6}$	$6,5 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^{-4}$	$7,1 \times 10^{-7}$	$3,1 \times 10^{-6}$
14	$ \Delta_f $	$1,6 \times 10^{-9}$	$1,7 \times 10^{-9}$	$1,1 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^{-9}$	$1,0 \times 10^{-9}$
	$ \Delta_{\text{int}} $	$6,5 \times 10^{-8}$	$8,1 \times 10^{-8}$	$1,7 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^{-8}$	$9,7 \times 10^{-8}$



Абсолютная погрешность квадратурных формул  
/ The absolute error of the quadrature formulas

Из представленных в таблице результатов и кривых на рисунке можно сделать следующие выводы:

- квадратурная формула сходится к истинному значению интеграла независимо от значений показателей  $\alpha$  и  $\beta$ ;

- близость функций  $J_0(z)$  и  $I(z)$  на один, два порядка уступает близости функции  $\varphi(x)$  и полинома  $\varphi_n(x)$ ;

- результаты 2-го и 3-го столбца таблицы при малых значениях порядка аппроксимации существенно отличаются от результатов в трех остальных столбцах, что обусловлено относительно большой мнимой частью показателя  $\beta$ . То же можно заметить и на рисунке (пунктирные линии).

Относительно последнего утверждения заметим, что корни многочлена Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  при комплексных значениях показателей  $\alpha$  и  $\beta$  являются комплексными и располагаются на эллипсоподобной кривой по одну сторону от интервала  $(-1, 1)$ , но при  $n \rightarrow \infty$  эта кривая стремится к интервалу  $(-1, 1)$ . Следовательно, при одинаковом порядке интерполяции чем больше мнимая часть показателей, тем дальше от интервала  $(-1, 1)$  располагаются узлы интерполирования и, очевидно, тем хуже аппроксимация функции  $\varphi(x)$  на самом интервале.

### Заключение

Получены квадратурные формулы для ГИ, содержащего весовую функцию полиномов Якоби с комплексными показателями степени. Приведенные квадратурные формулы вместе с квадратурными формулами для других интегралов [16, 17] поз-

воляют с успехом применить метод механических квадратур [17] к решению как ГИУ на отрезке, так и сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений разного вида.

### Литература

1. Линьков А.М., Могилевская С.Т. Гиперсингулярные интегралы в плоских задачах теории упругости // ПММ. 1990. Т. 54, вып. 1. С. 116–122.
2. Lu J., Hanyga A. Scattering of SH wave by a crack terminating at the interface of a bimaterial // Computational Mechanics. 2004. Vol. 34. P. 74–85. DOI: 10.1007/s00466-004-0555-3.
3. Whye-Teong A. Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis. Oxford: Woodhead Publishing House, 2013.
4. Boykov I., Aikashv P. To the numerical method for synthesis of fractal antennas, 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED). Prague, Czech Republic, 2019. P. 1–6.
5. Linz P. On the approximate computation of certain strongly singular integrals // Computing. 1985. Vol. 35. P. 345–353.
6. Kaya A.C., Erdogan F. On the solution of integral equations with strongly singular kernels // Quart. Appl. Math. 1987. Vol. 45. P. 105–122.
7. Diligenti M., Monegato G. Finite-part integrals: their occurrence and computation // Proc. 2nd Int. Conf. in Functional Analysis and Approximation Theory (4th ed.), F. Altomare, G. Mastroianni (Eds.), Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. II. 1993. Vol. 33. P. 39–61.
8. Бойков И.В., Добрынина Н.Ф., Домнин Л.Н. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решение гиперсингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1996. 188 с.
9. Criscuolo G. A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals // J. of Comp. and App. Math. 1997. Vol. 78, Iss. 2. P. 255–275. DOI:10.1016/S0377-0427(96)00142-2.
10. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
11. Плюева Л.Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 419–428. DOI: 10.15372/SJNM20160406.
12. Бойков И.В., Сёмов М.А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика. 2016. № 3. С. 3–17.
13. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 6. С. 116–121.

14. Адамар Ж. Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.

15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. СМБ. М.: Наука, 1966. Т. 2. 296 с.

16. Саакян А.В., Амирджанян А.А. Метод механических квадратур для решения сингулярных интегральных уравнений разного типа // Актуальные проблемы механики сплошной среды : тр. V Междунар. конф., 2–7 октября 2017 г. Цахкадзор, Армения, Ереван: НУАСА, 2017. С. 117–118.

17. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types // J. of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 991. P. 012070. DOI:10.1088/1742-6596/991/1/012070.

### References

1. Linkov A.M., Mogilevskaya S.T. (1990). Hypersingular integrals in plane problems of elasticity theory. *PMM*, vol. 54, no. 1, pp. 116-122. (in Russian).

2. Lu J., Hanyga A. (2004). Scattering of SH wave by a crack terminating at the interface of a biomaterial. *Computational Mechanics*, vol. 34, pp. 74-85. DOI: 10.1007/s00466-004-0555-3.

3. Whye-Teong A. (2013). *Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis*. Oxford, Woodhead Publ.

4. Boykov I., Aikashev P. (2019). To the numerical method for synthesis of fractal antennas. *2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED)*. Prague, Czech Republic, pp. 1-6.

5. Linz P. (1985). On the approximate computation of certain strongly singular integrals. *Computing*, vol. 35, pp. 345-353.

6. Kaya A.C., Erdogan F. (1987). On the solution of integral equations with strongly singular kernels. *Quart. Appl. Math.*, vol. 45, pp. 105-122.

7. Diligenti M., Monegato G. (1993). Finite-part integrals: their occurrence and computation. *Proc. 2nd Int. Conf. in Functional Analysis and Approximation Theory*. F. Altomare, G. Mastroianni (Eds.). Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, ser. II, vol. 33, pp. 39-61.

8. Boikov I.V., Dobrynina N.F., Domnin L.N. (1996). *Approximate methods for calculating Hadamard integrals and solving hypersingular integral equations*. Penza, Penza State University Press, 188 p. (in Russian).

9. Criscuolo G. (1997). A new algorithm for Cauchy principal value and Hadamard finite-part integrals. *J. of Comp. and App. Math.*, vol. 78, iss. 2, pp. 255-275. DOI: 10.1016/S0377-0427(96)00142-2.

10. Vainikko G.M., Lifanov I.K., Poltavsky L.N. (2001). *Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*. Moscow, Janus-K Publ., 508 p. (in Russian).

11. Plieva L.Yu. (2016). Quadrature formulas of interpolation type for hypersingular integrals on the integration segment. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki*, vol. 19, no. 4, pp. 419-428. DOI: 10.15372/SJNM20160406. (in Russian).

12. Boikov I. V., Semov M. A. (2016). On a method for calculating hypersingular integrals. *Izv. vuzov. Matematika*, no. 3, pp. 3-17. (in Russian).

13. Sahakian A.V. (2012). Quadrature formulas of the highest algebraic accuracy for a Cauchy integral when the indicators of the Jacobi weight function are complex. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*, no. 6, pp. 116-121. (in Russian).

14. Hadamar J. (1978). *Cauchy Problems for linear partial differential equations of hyperbolic type*. Moscow, Nauka Publ., 352 p. (in Russian).

15. Bateman G., Erdelyi A. (1966). *Higher transcendental functions*. SMB. Moscow, Nauka Publ., vol. 2, 296 p. (in Russian).

16. Sahakian A.V., Amirjanyan A.A. (2017). Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of different types. *Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoi sredy* [Actual problems of continuum mechanics]. Proceedings of the V International Conference, October 2-7, 2017. Tsakhkadzor, Armenia, Erevan, NUASA Press, pp. 117-118. (in Russian).

17. Sahakyan A.V., Amirjanyan H.A. (2018). Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. *J. of Physics: Conf. Series*, vol. 991, p. 012070. DOI: 10.1088/1742-6596/991/1/012070.



Ворович И.И. 1945 г.



Выпуск инженеров-механиков ВВИА 1944 г.  
Во втором ряду справа налево: И.И. Ворович, А.Д. Мышкис, Ю. Кочетков



1955 г. Л.С. и И.И. Ворович  
Фото Н.Н. Моисеева



Первомайская демонстрация 1953 г. Справа налево преподаватели мехмата:  
Н.Н. Моисеев, А.В. Батырев, М.М. Чепинога, А.К. Никитин, И.И. Ворович



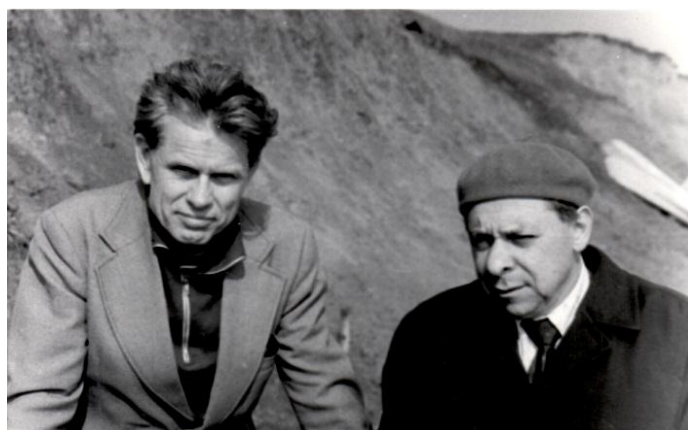
Тройка москвичей,  
появившихся на кафедре в 1950 г.  
И.И. Ворович, Л.А. Толоконников,  
Н.Н. Моисеев



Ростов н/Д, 1957 г. 1-й ряд: В.С. Корчагин, И.П. Оборотов,  
А.К. Никитин, И.И. Ворович, В. Меркулов, В. Кислер;  
2-й ряд: Л. Соловьева, А.И. Снопов, В.И. Юдович



Ю.В. Сафронов и И.И. Ворович



В.А. Какичев и И.И. Ворович



И.И. Ворович и А.И. Лурье



А.С. Самарский и И.И. Ворович



И.И. Ворович и М.Г. Хапланов



Н.А. Талицких и И.И. Ворович





1970 г. Кафедра теории упругости: Копасенко В.В., Аксентян О.К., Бабешко В.А., Белоконь А.В.,  
Зубов Л.М., Громов В.Г., Кадомцев И.Г., Сметанин Б.И., Устинов Ю.А., Шутько В.М., Журавлев Г.,  
Юдин А.С., Царюк Л.Б., Копасенко В.В., Пьянков Б.Г., Степаненко Ю.С., Пронченко И.П.,  
Орлов В.С., Шляфман Е.М. и другие



1985 г. Кафедра теории упругости: Ворович И.И., Белоконь А.В., Ватульян А.О., Гетман И.П.,  
Зубов Л.М., Кадомцев И.Г., Карпинский Д.Н., Копасенко В.В., Наседкин А.В., Скалиух А.С.,  
Потетюнко Э.Н., Шутько В.М. и другие



В НИИМиПМ



И.И. Ворович и В.А. Бабешко



2000 г. На праздновании 80-летия.

Ю.А. Жданов, Л.С. Ворович, И.И. Ворович



Н.Ф. Морозов, И.И. Ворович, А.Ф. Улитко



DOI 10.18522/1026–2237-2020-2-105-126

## ВОСПОМИНАНИЯ СОРАТНИКОВ И УЧЕНИКОВ

*Казалось бы, куда ей торопиться,  
Но мчится жизнь, и что ни год – быстреей...  
А с фотографий грустно смотрят лица  
Навек уже утраченных друзей.  
Мы старимся, и глазу всё заметней,  
И сердцу незатихшему – больней,  
Что стали очень редкими свидетели  
Восторженно-наивных наших дней...*

*В.К. Жак*

*Л.С. Ворович, редактор журнала*

*«Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки»*

Почти 20 лет прошло с тех пор, как не стало И.И. Воровича. Все эти годы 21 июня на кафедре теории упругости и в институте НИИМиПМ был праздник – отмечался день рождения первого заведующего кафедрой и первого директора института. Собирались представители разных кафедр мехмата и отделов института, всегда приглашали и меня. Вспоминали не только Иосифа Израилевича, но и его удивительных друзей из разных городов и республик, с которыми встречались на конференциях, школах, съездах, защитах диссертаций. Эти посиделки не были формальными, и воспоминания были живыми и веселыми. На одной из таких встреч я предложила присутствующим записать эти воспоминания. Так я стала составителем сборника «Воспоминания об академике И.И. Воровиче» (2004 г.).

В него были включены статьи и заметки об Иосифе Израилевиче, написанные его друзьями, коллегами, учениками в разное время и по разным поводам, несколько его интервью, неопубликованный ранее доклад. Сборник был адресован широкому кругу читателей, проявляющих интерес к науке и ее выдающимся деятелям. Издательство – Ростовский государственный университет путей сообщения. Издатель – академик РАН В.И. Колесников. Продажа сборника не предусматривалась. Его получили авторы и многие ученые, участники международных конференций, проводившихся раньше ежегодно, некоторые сотрудники института и мехмата РГУ, ученики научной школы Иосифа Израилевича и породнившиеся с нею школ.

За прожитые годы многое изменилось. НИИМиПМ и механико-математический факультет преобразованы. Новое название: Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича. Ушли из жизни многие авторы упомянутого сборника (В.И. Юдович, Э.Н. Потетюнко, А.В. Белоконов, А.И. Снопов, В.М. Александров, А.Ф. Улитко, С.В. Жак, Л.А. Крукиер, М.Б. Налбандян, М.А. Краплин...).

Еще при жизни Иосифа Израилевича не стало Н.Н. Моисеева (2000), С.М. Белоцерковского (2000), Е.А. Негина (1998), Е.И. Забабахина (1984), В.И. Феодосьева (1991), В.С. Пугачева (1998), А.И. Лурье (1980). Ворович очень тяжело переносил эти утраты, которые, несомненно, оставляли рубцы на его сердце. Другие на несколько лет пережили его (Л.С. Гурин, А.Л. Гольденвейзер, А.Д. Мышкис, Ю.А. Жданов, Л.В. Овсянников).

Это были люди, которых он любил, с мнениями которых считался, которыми гордился и бесконечно им доверял. Все они значили для Воровича очень много. С некоторыми из них он встречался довольно часто на многочисленных конференциях, съездах, защитах диссертаций. С другими не виделся годами, но всегда помнил о них, рассказывал связанные с ними истории. Герои его рассказов были описаны с любовью и так ярко, что становились своими и близкими. Многие из них часто бывали в Ростове в качестве докладчиков на научном семинаре, выступали оппонентами на ученом совете по кандидатским и докторским диссертациям, читали курс лекций студентам и аспирантам, знакомя их со своими научными

ми исследованиями. Эти люди были талантливы, работоспособны, абсолютно порядочны в профессиональной и научной деятельности. Но они были живые и, конечно, не лишены недостатков. Обижались, раздражались, упрямылись, может быть, злились; хотели, чтобы их жены, дети, внуки, ученики и ученики учеников были идеальны, все делали хорошо, вовремя, желательно без их вмешательства. Иногда даже искали виновных в бытовых неурядицах, конечно же, находили – разумеется, не себя. Спасало чувство юмора всех упомянутых. Надо отдать должное бывшим с ними рядом женщинам, которые интуитивно чувствовали заложенные в их мужчинах достоинства, талантливость, доброту, любовь к науке, природе, жизни. Выбирали их, любили их, прощали.

Ворович понимал уникальность этих людей, но воспоминаний не написал. Хочется восстановить в памяти своё восприятие его друзей, сформировавшееся во время коротких встреч.

В сборник я как составитель включила юмористические высказывания, записанные собственноручно авторами (Я.Г. Пановко, В.И. Феодосьевым, А.Л. Гольденвейзером), очень близкими Воровичу и любимыми им людьми. Это был домашний альбом. Друзья приехали праздновать 60-летний юбилей Воровича (21 июня 1980 г.), сидели у нас дома, писали в альбом всё, что думают о юбиляре и таким образом развлекались. Перечитываю их писания и восторгаюсь стилем, чувством меры, юмором, просто умением так красочно излагать отношение к объекту своего исследования, не забывая о его достоинствах и недостатках, зная досконально биографию и его научные интересы.

Вот, например, как Алексей Львович описывает отношение Воровича к институту, директором которого он был: «...Ворович всё может. Он превращает терриконы в изящные кувшины (автор имел в виду отдел механики грунтов и горных пород. – Л.В.), и если перевести на счет института достаточно денег, то он всё, что угодно, сосчитает, докажет, проверит и опровергнет. Не поспеете на перевод, и Ворович определит траекторию летающей тарелки, докажет теорему Пифагора для Бермудского треугольника, обнаружит локнесское чудовище и протащит его в членкоры...»

А вот несколько фраз о предстоящем юбилее, взятых из текста, авторы которого Я.Г. Пановко и В.И. Феодосьев: «...В текущем 1980 году два основных события волнуют мировую прогрессивную общественность. Это – московские

Олимпийские игры, подготовка к которым сопровождается недостойной возней агрессивных империалистических кругов вокруг их бойкота, и второе, хронологически предшествующее первому, – юбилей Воровича, не больше и не меньше!» Далее – в таком же роде. Даже этих отрывков достаточно, чтобы увидеть близость этих людей.

Я совершенно не помню реакции Воровича на эти шутки. Про альбом забыли. Я его обнаружила в 2002 г., когда собирала материал для сборника.

*Владимир Семенович Пугачев (1911-1998).* Один из руководителей И.И. Воровича в Военно-воздушной инженерной академии имени Н.Е. Жуковского академик Владимир Семенович Пугачев, вспоминая своего ученика, часто употребляет слово «первый». Он рассказывает биографию Иосифа Израилевича начиная с 1941 г., когда студенты университетов и технических вузов были направлены на ускоренное обучение в академию. Воровича зачислили на факультет авиационного вооружения. «...Работал над новой прикладной задачей в области новой техники... Ворович первый начал изучать устойчивость систем с учетом случайных возмущений... В 1949 г. заложил основы нового направления в общей теории устойчивости... Первый в мировой науке применил методы теории вероятностей и теории случайных функций... Заложил основы статистической динамики тонкостенных конструкций... и т.д.»

Владимир Семенович, как и многие другие, был представлен ростовской научной школе, выступал с лекциями для аспирантов, делал доклады на научном семинаре. Иосиф Израилевич относился к нему трепетно, с уважением и любовью. Он знал о традициях в его семье, не раз бывал у Пугачева дома. Там его жена командовала парадом, и парад был настоящим. Я была предупреждена, что его надо принимать как высокого гостя, ни в коем случае не на кухне. В Ростове Владимир Семенович жил в гостинице. Обычно они с Воровичем возвращались к нам домой вместе, все было, как положено.

Но как-то Пугачев, освободившись раньше, пришел к нам с пачкой пельменей. Мы втроем (гость, я и дочка) устроились на кухне и решили слегка перекусить. Завязалась беседа. Владимир Семенович прекрасно себя чувствовал в кухонной обстановке, рассказывал о военных годах, о голодной жизни в Свердловске, о том, что неко-

торые слушатели академии не выдерживали года и убегали на фронт. Это считалось дезертирством и строго наказывалось. Он очень хвалил Воровича, считал его одним из лучших слушателей и адъюнктов. После окончания академии по рекомендации Дмитрия Александровича Вентцеля и Владимира Семеновича Пугачева Воровича направили в адъюнктуру, но сразу после Парада Победы он был отозван из академии и направлен в Забайкальский военный округ, назначен в 10-й гвардейский авиационный полк инженером авиаэскадрильи.

Полк летал на новейших самолетах конструкции А.Н. Туполева. В августе начались боевые действия, полк перебазировался на аэродром Саншилипу, в 60 км от Порт-Артура. Отчаянные попытки Пугачева и Вентцеля вернуть адъюнкта (теперь уже капитана) к научной деятельности не увенчались успехом. Сам же Ворович считал, что эта служба многому его научила. Уже там он понял, чем ему хотелось бы заниматься в научном плане в будущем.

Еще Пугачев рассказывал, что в академии проводились опросы и анкетирование слушателей и адъюнктов. Один из вопросов: «С кем из указанных товарищей Вы бы пошли в разведку?» И почти все указали Воровича. Когда позже, получив взыскание за неправильное поведение, я рассказала про разведку Воровичу, он посмеялся и сказал, что, скорее всего, Владимир Семенович все это выдумал из воспитательных соображений, чтобы я более почтительно вела себя с мужем и его друзьями. Вот так. Мне кажется, что после посещения Ростова, пельменей и чаепития на кухне их отношения стали проще. Владимир Семенович всегда сообщал телеграммой, когда они с женой (обычно это было летом) проезжали через Ростов. Мы встречались на вокзале. Между прочим, таким образом иногда проводились встречи и с другими москвичами и ленинградцами. Несколько раз мы были в гостях у Пугачевых на даче, кажется, в Одинцово. Нас принимала вся семья: Пугачевы и Синицыны – дочь и зять. Все происходило по высшему разряду – в большой столовой, за празднично и по всем правилам накрытым столом.

Пугачева не стало в 1998 г. Но остались самые теплые воспоминания об этом красивом и мужественном человеке.

*Анатолий Исаакович Лурье (1901–1980).* Он был старше Воровича по возрасту, я точно не знаю, когда состоялось их личное знакомство.

Возможно, в предзащитный (докторская диссертация) период, когда Ворович часто делал доклады на научных семинарах в Москве и Ленинграде. Я же впервые увидела Анатолия Исааковича за несколько дней до защиты Воровичем докторской диссертации (1958 г.) – мне поручили отвезти ему домой автореферат. К этому времени я уже окончила мехмат РГУ и преподавала теоретическую механику в техническом вузе. Авторами одного из лучших учебников были Л.Г. Лойцянский и А.И. Лурье. Это были корифеи, живые легенды. Анатолий Исаакович оказался симпатичным стройным пожилым человеком с пышной шевелюрой и очень живыми глазами. Много позже я узнала, с каким уважением и любовью относятся к Лурье его ученики, сотрудники его кафедры, ученые. Они знали, что он читает, каких поэтов и бардов любит, его часто употребляемые словечки. Анатолий Исаакович несколько раз бывал в Ростове, читал курс лекций на научном семинаре, оппонировал диссертации. Я узнала, как легко с ним общаться, какой он добрый, милый и интеллигентный человек.

Несколько лет свой отпуск мы проводили на Дону, где главным занятием была рыбалка. Воровича одолевало желание передать пойманную им рыбу в Ленинград А.И. Лурье, он хотел похвастаться. Это было нелегко сделать, рыбу нужно было доставить живой. Мы так ничего и не придумали, очень переживали.

Подтверждением дружеских отношений было появление в Ростове на кафедре теории упругости любимого ученика Анатолия Исааковича – Леонида Михайловича Зубова, теперь крупного российского ученого, доктора физико-математических наук. Я знаю, что Анатолий Исаакович с отеческой любовью относился к Леониду Михайловичу, внимательно следил за его научными успехами.

Вспоминаю нашу встречу с Лурье в Тбилиси в 1971 году. Отмечалось восьмидесятилетие крупного ученого, математика и механика, президента АН Грузии Николая Ивановича Мухелишвили. Анатолий Исаакович приехал с дочерью Соней, очень красивой молодой женщиной. Жили мы в одной гостинице, в свободное время гуляли по старому городу. На домах, телефонных будках, в небольших сапожных мастерских мы увидели портреты Мухелишвили. Это было удивительно. Не артист, не певец, просто ученый! Спросили у чистильщика обуви, знает ли он, кто это? И он с любовью и гордостью расска-

зал нам биографию ученого, подчеркивая, что он заслуженный человек, что это его юбилей празднуется в городе. Нам было приятно чувствовать внимание и уважение простых людей к своим знаменитым согражданам. Позже мы зашли в небольшой ресторан. Время было обеденное, но людей было мало. Мы сделали заказ. Ворович и Лурье беседовали, вспоминали свои прошлые поездки по южным республикам, кавказское гостеприимство, уважение к старшим. Нам принесли заказанную нами еду, а кроме того – шампанское и шоколад. Мы отказывались, объясняя официанту, что произошла ошибка, но тот утверждал, что это подарок нам от кого-то из посетителей ресторана. Осмотр зала ситуацию не прояснил, знакомых мы не увидели. Ворович, обращаясь к Анатолию Исааковичу, сказал, что, вероятно, его узнали и приветствуют. Лурье утверждал, что узнали Воровича. Так они препирались, надо сказать, не без удовольствия. Мысль, что кого-то из них здесь знают, сама по себе была им приятна, хотя и нереальна. Через некоторое время официант прояснил ситуацию. Ему пришлось объяснить мужчинам, что дары предназначались вовсе не им, а их прекрасным спутницам. Мы с Соней были довольны, а учёные мужи слегка смущены. Они объясняли нам, что размышлялись не о личной известности и узнаваемости, а о понимании согражданами великой роли науки. В конце концов оказалось, что в ресторане компания инженеров отмечала какое-то событие. Это они приветствовали нас. Мы

познакомились. Фамилию Ворович они, конечно, не знали. Затем Ворович представил им Анатолия Исааковича, назвав все его регалии. Не знаю как сейчас, но тогда фамилия автора одного из лучших учебников по теоретической механике была известна любому выпускнику технического вуза. Инженеры были потрясены. Они повторяли: «Неужели это тот самый Лурье, который с Лойцянским?» Престиж науки в тот вечер на наших глазах был подтвержден.

Очень жаль, что Ворович не написал свои воспоминания, все откладывал. Я уверена, что они получились бы интересными, яркими, запоминающимися. И мне не пришлось бы мучиться, подбирая слова, чтобы хоть как-то передать масштаб личности этих замечательных людей. Но все-таки я знаю три книги воспоминаний, написанных его друзьями. Это «Как далеко до завтрашнего дня... Свободные размышления» Н.Н. Моисеева (1994 г.); «Советские математики. Мои воспоминания» А.Д. Мышкиса (2007 г.); «Мои пять жизней» Е.Д. Мышкис (одна из жён А.Д. Мышкиса), издана в 2019 г. В каждой из них в роли друга, сокурсника, ученого описан И.И. Ворович. Книги замечательные. В них наша история и взгляд авторов на нее, их гордость за страну и одновременно боль за ее несовершенство, за «не сбылось». И еще увлечение наукой, стремление постичь, осмыслить, развить. И вера в добро, богатую сильную и счастливую страну. Надо только очень хотеть. И работать, работать, работать.

*В.И. Колесников, академик РАН, доктор технических наук,  
Ростовский государственный университет путей сообщения*

Судьба предоставила многим возможность учиться и трудиться рядом с выдающимся ученым, учителем, педагогом и замечательным человеком Иосифом Израилевичем Воровичем. Ученый, который при жизни и после нее, светлая ему память, был признан и оставил огромное наследие.

Я не буду перечислять его научных достижений, об этом говорится во многих книгах. Хочу поделиться своими воспоминаниями.

Прошло уже много лет после смерти Иосифа Израилевича, а я до сих пор с волнением вспоминаю его тихий, проникновенный голос, вижу

глаза, полные огромного человеческого тепла и интереса к окружающему миру. Перелистываю его книги, монографии, статьи, восстанавливаю в памяти встречи, беседы.

Одной из главных черт Иосифа Израилевича была природная скромность. И в то же время честолюбие ему было отнюдь не чуждо. Но это было честолюбие творца, мастера, который, окончив работу, ждал признания ценителей, а никак не милости начальства.

Любое дело было ему по плечу. Не многие из нас понимают, каким важным может быть ма-

ленькое дело. Казалось, студенты, ученики – не самое главное. Главное – наука. Ан нет, для Иосифа Израилевича вся его жизнь – это органичное единство всего, что служило науке.

Вспоминаю случай, который удивил меня до глубины души. Мы заседали на очень серьезном научном собрании, горячо обсуждая важные проблемы... Обстановка была накаленной, спорили, эмоции лились через край. И вдруг И.И. Ворович тихонечко встал, подошел к телефонному аппарату и позвонил своему студенту, объясняя, как ему правильно задать граничные условия для решения задачи. Этот поступок говорит о безраздельной преданности своему делу, своим ученикам. И они платили ему тем же. Его лекции не просто посещали, его слушали, внимали каждому его слову. Трудно было не оценить остроту его ума, энергию и темперамент.

Все, что он делал, он делал не просто хорошо, а с огромным энтузиазмом. Будь то рыбалка, которую он любил, встреча с друзьями или занятия со своими учениками. Мир его интересов не кончался у дверей его дома или в лаборатории института, он был неизмеримо шире.

Окружающие всегда чувствовали его доброжелательность, душевный подъем, его огромный мир, в который вмещалось так много интересно. Иосиф Израилевич был необыкновенно че-

стен во всех делах, а в мире науки, в общении с коллегами – это немаловажный фактор.

Он не умалял своих заслуг, но и никогда не выпячивал их перед своими коллегами. У И.И. Воровича на чистоту отсутствовали такие качества, как важность, надменность. Только уважение и еще раз уважение к людям всегда преобладало. Он был из числа людей, для которых материальные блага не были определяющими, все, чем он жил, – это наука, труд, ученики.

И сегодня, встречаясь с супругой И.И. Воровича Любовью Семеновной в скромной квартире, я часто сижу в его кабинете, который хранит память о хозяине. Размышляя о сегодняшнем дне, о науке, я понимаю, как беден мир без таких людей. И как бывает при жизни, чего греха таить, мы часто недооцениваем замечательных людей, живущих рядом с нами.

Говорят, мудрый человек мужает, но не стареет – таким был Иосиф Израилевич Ворович. «Мудрость есть не что иное, как наука о счастье», – сказал великий философ Дидро. И.И. Ворович был поистине счастливым человеком. И это счастье, счастье жизни, открытий он оставил своим ученикам.

\*\*\*

Фрагмент из книги  
«Воспоминания об академике И.И. Воровиче» 2004.  
Изд-во РГУПС, 319 с.

*В.А. Бабешко, академик РАН, доктор физико-математических наук,  
Кубанский государственный университет*

Выдающемуся ученому, блестящему математику и механику, моему учителю, академику Иосифу Израилевичу Воровичу 21 июня 2020 г. исполнилось бы 100 лет. И.И. Ворович принадлежал к той плеяде талантливых ученых, которые прославили отечественную школу механиков, сделав ее ведущей в научном мире.

И.И. Ворович родился в 1920 г. в старинном русском городе Стародубе Брянской области, где окончил среднюю школу, а в 1937 г. поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета – одного из лучших высших учебных заведений мира в области точных наук. Там работали замечательные математики XX столетия: академики

А.Н. Колмогоров, П.С. Александров, С.Л. Соболев, И.Г. Петровский, имеющие мировую известность механики старшего поколения, ученики Н.Е. Жуковского – академики С.А. Чаплыгин, Л.С. Лейбензон. Отдельные курсы читал академик А.Н. Крылов. Начинала свою деятельность блестящая плеяда молодых профессоров – М.В. Келдыш, Л.И. Седов, А.Ю. Ишлинский, Г.И. Петров и др., которым в недалеком будущем предстояло занять лидирующие позиции в отечественной механике.

И.И. Ворович с увлечением слушал лекции этих замечательных ученых. Наступил 1941 г., полным ходом шло выполнение курсовой работы под руководством молодого профессора

А.Ю. Ишлинского – будущего академика РАН, однако защита не состоялась. В начале июля 1941 г. И.И. Ворович с другими студентами 4-го курса в составе рабочего батальона уехал на строительство противотанковых укреплений в район Брянска – Орла. Эта работа продолжалась до сентября 1941 г., когда весь университетский курс И.И. Воровича был призван в ряды Красной армии. Их направили в Военно-воздушную инженерную академию им. Н.Е. Жуковского (ВВИА) для завершения образования. И.И. Ворович становится слушателем одного из лучших высших технических заведений страны. На одном курсе в ВВИА учились призванные в армию молодые люди, которым было суждено составить костяк инженерного корпуса авиации. По некоторым сведениям, из этого талантливой курса выросли 12 действительных членов и членов-корреспондентов Академии наук СССР.

Оценивая с позиций сегодняшнего дня решение Правительства СССР о направлении студентов страны для продолжения образования в академиях Красной армии, нельзя не признать его чрезвычайно мудрым. В ВВИА преподавали выдающиеся специалисты, такие как академик В.С. Пугачёв, под руководством которого впоследствии стал работать И.И. Ворович.

Войну Иосиф Израилевич закончил на Ляодунском полуострове под Порт-Артуром в составе 10-го гвардейского авиационного полка. В 1947 г. И.И. Ворович был отозван в академию для продолжения образования, где под руководством В.С. Пугачёва включился в интенсивную работу по оценке влияния случайных факторов на системы автоматического регулирования и управления.

В 1950 г. И.И. Ворович успешно защитил кандидатскую диссертацию и после демобилизации получил назначение в Ростовский государственный университет.

В 1961 г. по инициативе Ю.А. Жданова, занимавшего в те годы пост ректора РГУ, была основана кафедра теории упругости, которую возглавил профессор И.И. Ворович. В сфере научных интересов Воровича и руководимого им молодого коллектива – теория тонкостенных конструкций и контактная прочность. Обе проблемы были исключительно важны для приложений, составляли основу расчета многих машин и сооруже-

ний и вместе с тем оказались чрезвычайно сложными с математической точки зрения.

Особенностью исследований Иосифа Израилевича в области механики явились глубокие новаторские шаги, связанные с привлечением в механику самого современного математического аппарата того времени – топологических методов, теории нелинейных операторных уравнений. Ряд вопросов математической теории применительно к нелинейной теории оболочек ему пришлось развивать самостоятельно.

Именно благодаря этому И.И. Воровичу впервые удалось провести строгий математический анализ потери устойчивости «в большом» нелинейных оболочек, составляющих основу конструкций корпусов ракетно-космической техники, изделий авиа- и судостроения.

Первый этап его работы был закончен в конце 50-х гг. и составил основу его докторской диссертации, успешно защищенной в 1958 г. в Ленинградском государственном университете. Работа получила высокую оценку авторитетных математиков и механиков страны и принесла автору мировую известность.

В 1998 г. И.И. Ворович в составе группы ученых был удостоен Государственной премии Российской Федерации за цикл работ «Фундаментальные проблемы тонкостенных конструкций».

Параллельно И.И. Ворович и его ученики вели интенсивные исследования по проблеме контактной прочности. Здесь вновь проявились характерные для Иосифа Израилевича черты научного творчества – редкое сочетание строгого математического подхода и умения довести теорию до инженерного приложения. Вместе с учениками были изданы две монографии, получившие широкую международную известность.

С созданием Северо-Кавказского научного центра высшей школы, руководителем которого стал Ю.А. Жданов, при РГУ было основано пять научно-исследовательских институтов, среди них – Институт механики и прикладной математики (НИИМиПМ), который в настоящее время носит имя И.И. Воровича. Директором института в 1971 г. стал Иосиф Израилевич. Вся работа по формированию тематики института, подготовке кадров, материальной базы легла на его плечи. Вскоре институт стал одним из ведущих научных центров страны в области механики и при-



кладной математики. В НИИМиПМ было выполнено немало первоклассных исследований, среди которых следует отметить фундаментальную работу по созданию эколого-математической модели Азовского моря. Эта работа, начатая по инициативе Ю.А. Жданова и И.И. Воровича, в то время не имела равных в мире по количеству учтенных факторов, полноте описания динамических процессов, точности верификации модели.

Работа получила высокую оценку, группа исследователей, в том числе И.И. Ворович, в 1983 г. была удостоена Государственной премии СССР.

За выдающиеся заслуги в области механики и прикладной математики И.И. Ворович в 1970 г. был избран членом-корреспондентом, а в 1990 г. – действительным членом Академии наук СССР.

Академик И.И. Ворович – автор и соавтор более 300 работ в области механики и прикладной математики, 14 монографий (две из них изданы за рубежом). Школа И.И. Воровича насчитывает более 20 докторов и 120 кандидатов физико-математических наук. Среди его учеников – ректоры вузов, заведующие кафедрами, профессора и доценты вузов Северного Кавказа, ведущие работники РАН. Они с честью представляют отечественную науку в университетах Европы и Америки.

И хотя Иосифа Израилевича нет почти двадцать лет, он всё равно с нами, с его идеями, наработками, публикациями. В своей творческой деятельности он опережал время. Многими своими работами он создал свое научное наследие, которое питает мыслями его учеников и последователей. Взяв практически любую работу Иосифа Израилевича, что, например, я и делаю, можно найти те необычные для того времени акценты, которые раскрываются только сейчас. Так, никогда в те времена не решались дифференциальные уравнения топологическими методами, а определенные шаги в этом направлении были сделаны Иосифом Израилевичем в нашей монографии. Сейчас это разработано и дает заметную отдачу в теории прочности и сейсмологии. Метод замороженных коэффициентов, предложенный им в монографии по Азовскому морю, сейчас является рабочим инструментом во многих исследованиях. Теория

динамических контактных задач, разработанная Иосифом Израилевичем, нашла продолжение и привела к возможности прогнозирования землетрясений и цунами. Изучение базисных свойств решений граничных задач теории упругости, опубликованных с одним из своих учеников, В.Е. Ковальчуком, в настоящее время служит руководством в ряде работ. Эта работа также является продолжением исследования решений в области с угловыми точками, выполненного одним из учеников. Можно продолжить список примеров. Публикации настоящего времени, использующие идеи Иосифа Израилевича, принимаются в самые высокорейтинговые журналы и докладываются на международных конгрессах в разных странах, что лишним раз подчеркивает, что это выдающийся, талантливый ученый, умевший предвидеть пути развития науки.

За заслуги перед Отечеством в мирное и военное время академик И.И. Ворович награжден орденами Отечественной войны второй степени, Трудового Красного Знамени, «Знак Почета», Дружбы народов, а также 12 медалями, среди которых «За победу над фашистской Германией», «За победу над Японией», медаль маршала Г.К. Жукова, а также академика П.С. Капицы и академика А.А. Благонравова за достижения в науке.

Академик И.И. Ворович отличался скромностью, простотой и обаянием. Его никогда не покидало чувство юмора. В нем гармонично сочетались талант пытливого исследователя и доброта и такт в отношении к людям.

Он был полон творческих идей, однако его скоропостижная смерть 6 сентября 2001 г. оборвала его планы.

И.И. Ворович прожил долгую, полную свершений жизнь и оставил после себя не только огромное творческое наследие – научную школу последователей, идеи, монографии, которые еще долго будут определять развитие научной мысли в области механики, но и сформировал некоторые нравственные принципы в науке, которые служат путеводной звездой молодым исследователям в сложном современном мире.

Иосиф Израилевич будет жить в своих идеях и публикациях, в поколениях учеников и соратников, продолжателей глубоких мыслей ученого, которые вряд ли будут стареть со временем.

*А.О. Ватульян, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Южный федеральный университет*

Почти 20 лет прошло, как не стало Иосифа Израилевича, я мысленно часто возвращаюсь к тому периоду, когда мне довелось общаться с ним, – это около 30 лет жизни, вспоминаю, восхищаюсь, переосмысливаю.

Об И.И. Воровиче я впервые услышал от отца – преподавателя кафедры теоретической механики Новочеркасского политехнического института – в 1963 г., когда мне было 10 лет. В это время отец был сосредоточен на подготовке к защите кандидатской диссертации, а Иосиф Израилевич (как я потом узнал, руководитель его дипломной работы на физмате РГУ) должен был приехать из Ростова в Новочеркасск, чтобы присутствовать на защите и, как я полагал, помочь в этом. В детском воображении он представлялся человеком большого роста с окладистой бородой сообразно его влиянию и положению в научном мире. Однако мне не довелось тогда увидеть его, личное знакомство произошло значительно позже, в Ростове.

Через несколько лет я вновь услышал об этом удивительном человеке. Увлечись математикой, я задумался о поступлении на отделение математики в университет. Отец, прививший мне любовь к этой науке, и желая повлиять на мой выбор, много рассказывал о первых годах работы И.И. Воровича в Ростовском университете в начале 50-х гг., о созданной им научной школе, о разнообразии научных проблем, решаемых под его руководством, причем всегда говорил о нем с восхищением и чувством гордости. Это сыграло значительную роль в моем окончательном выборе – я поступил на отделение механики.

Став студентом РГУ, в начале 1971 г. я увидел И.И. Воровича на лекции по теоретической механике. Из студенческих воспоминаний тех лет запомнились его простота в общении со студентами-первогодками («товарищ Устюченкова, как Вы считаете?»), удивительно теплый взгляд больших карих глаз и потрясающая эрудированность во всех вопросах механики и математики. Иосиф Израилевич был не только превосходным лектором, но и носителем математической и общечеловеческой культуры. От него студенты узнавали впервые имена Б.Г. Галеркина, А.Н. Крылова, В.С. Пугачева, М.В. Келдыша, Л.И. Седова, А.Ю. Ишлинского, Д.А. Вентцеля и многих других ученых, вписавших яркие стра-

ницы в достижения отечественной математики и механики, лекции и выступления которых Иосифу Израилевичу доводилось слушать в Московском университете, с кем сводила его судьба за многие годы плодотворной и многогранной научной деятельности.

Все годы обучения в университете, а затем и в аспирантуре я и мои сокурсники имели возможность наблюдать за стилем преподавания И.И. Воровича. В его манере чтения лекций удивительным образом сочетались глобальные проблемы механики и математики с живыми практическими задачами, яркие примеры из истории механики (и не только механики!) и умение доходчиво объяснять самые сложные разделы курса, искусство находить параллели между совершенно различными с первого взгляда объектами, аккуратность и строгость при проведении доказательств сформулированных утверждений. Понимая, что способ подачи материала – один из важнейших аспектов обучения, он создал напутствие для молодых преподавателей (и не только молодых) – «О чтении лекций по естественным наукам», которое оказало влияние на многие поколения.

Надо отметить постоянное внимание Иосифа Израилевича к молодежи – к молодым сотрудникам, аспирантам, его доверие и моральную поддержку. С теплотой вспоминаю первую свою поездку в качестве аспиранта-первогодка на Всесоюзную конференцию в Брянск в 1976 г. В большой делегации ростовчан были и маститые ученые, и аспиранты. Иосиф Израилевич, тогда уже довольно известный ученый, член-корреспондент АН СССР, директор большого института, всюду брал нас с собой, с гордостью представлял своим коллегам, знакомил с крупными учеными. Тогда же в непринужденной обстановке он познакомил нас с очень известным ученым-механиком – Л.А. Галиным, многогранным человеком, восхитившим окружающих, когда во время обеда в кафе он написал на салфетке четверостишие, посвященное контактному задаче.

Жизнерадостность, оптимизм, удивительно тонкая и мягкая ирония в отношениях с окружающими пронизывали всю жизнь И.И. Воровича. Особенно это проявлялось на торжественных заседаниях кафедры теории упругости, куда приглашались и аспиранты (обычно аспиранты и

осуществляли подготовку этих мероприятий). Мы общались с ним, буквально впитывали истории из его жизни, учебы в МГУ и в академии им. Н.Е. Жуковского, воспоминания о военных годах. Его тонкий юмор и ораторское искусство позволяли с блеском проводить праздничные столы. Следует отметить, что научные семинары кафедры, а также и неформальные собрания по праздничным дням позволили сплотить коллектив кафедры теории упругости, где всегда царили уважение, творческая обстановка, взаимопонимание и поддержка.

После окончания аспирантуры мне в качестве ассистента кафедры теории упругости немало довелось общаться с И.И. Воровичем по проблемам разного рода – это и вопросы построения нового спецкурса, и научные проблемы механики контактных взаимодействий, и обсуждение лабораторного практикума; впоследствии это были и научные вопросы, связанные с докторантурой и тематикой, касающейся обратных задач. По всем вопросам у него можно было получить консультацию и дельный совет. Иосифа Израилевича отличала неторопливость в окончательных суждениях по какому-нибудь спорному вопросу, особенно это касалось споров и обсуждения докладов на научных семинарах кафедры теории упругости. Надо отметить его всегда уважительное отношение к докладчику, умение похвалить и указать на перспективы развития представленной проблематики, весьма тактично обратить внимание на неточности, сделать замечания в форме пожеланий и привести убедительные контрпримеры в случае несогласия с основными тезисами докладчика. Вместе с тем если И.И. Ворович был твердо убежден в своей правоте и необходимости выполнения какого-то решения, то он был достаточно тверд при его претворении в жизнь.

Широта научных интересов Иосифа Израилевича поистине была необычайной. Его мощный математический аппарат и выдающийся интеллект позволяли браться и решать многие трудные задачи механики. Только перечисление областей механики, в которых ему принадлежат первоклассные научные результаты, может составить предмет отдельной статьи. Это нелинейные проблемы теории оболочек, исследование о структуре решений для плит в окрестности ребра, сочетание асимптотических методов и методов функционального анализа при решении контактных задач, в том числе и динамических, анализ

устойчивости конструкций из материалов с реологией, механика связанных полей, обратные задачи.

Вспоминая об Иосифе Израилевиче как о выдающемся ученом, нельзя не отметить редкое для человека такого уровня качество, как доступность для окружающих. Дверь его кабинета в институте механики всегда была открыта и для профессоров, и для студентов. Во время одного из своих визитов в Ростов-на-Дону выдающийся отечественный механик Б.Е. Победря, заведующий кафедрой механики композитов МГУ, хорошо знавший Воровича, а также и научную среду в Москве, говорил: «Вы не знаете, какие это редкие качества в современном научном мире – доступность и открытость; Иосиф Израилевич ими в полной мере обладает». Да, действительно, многие, в том числе и я, воспринимали это его качество как что-то само собой разумеющееся. Однако со временем стало ясно, что это качество в сочетании с глубокой интеллигентностью и эрудированностью значительно возвышает этого человека над окружающими.

В последний год своей жизни Иосиф Израилевич стал гораздо откровеннее со мной, рассказывал о некоторых событиях своей жизни, о которых я раньше не слышал, делился своими мыслями о будущем, о перспективных направлениях развития механики. Посвятив некоторую часть своей многогранной научной деятельности статистическим методам в теории оболочек (по сути, он и В.В. Болотин были первооткрывателями в этой области), И.И. Ворович прекрасно владел аппаратом теории случайных процессов. Когда мне было поручено создать новый курс по приложениям случайных процессов в механике, он предложил использовать современные достижения в этой области для построения моделей в геомеханике и механике композитов. Этот курс был создан, сейчас его уже читают мои ученики.

Он обладал удивительным качеством стратега – предвидеть, в каком направлении будут развиваться разделы механики. Так, в конце 80-х гг., понимая, что вычислительные технологии, основанные на КЭ-технологиях, способны дать решение многих практических задач, обратил внимание молодых механиков, в том числе и моё, на новый класс задач механики – обратных. В то время его внимание было обращено лишь на обратные геометрические задачи, посвященные проблемам дефектоскопии, в частности реконструкции полостей и трещин в упругих телах. В

первое время я не очень прислушивался к его мнению, поскольку такие задачи, требовавшие и новых аналитических подходов, и новых вычислительных технологий решения нелинейных и некорректных задач, были достаточно трудны и в то время привлекали лишь внимание математиков-теоретиков. Со временем пришло понимание нюансов этих задач, были развиты подходы и вычислительные схемы для решения широкого класса обратных задач (в том числе и для самого трудного класса – коэффициентных), мной был подготовлен лекционный курс, стали выполняться научные работы, появилась книга. Сейчас, через 30 лет, я не устаю восхищаться научному предвидению учителя.

Забота о молодых исследователях и о сохранении преемственности в науке в трудные для нашей страны 90-е гг. привела его к решению о создании докторского диссертационного совета по механике в РГУ (совет утвержден ВАКом в 1993г.) и о проведении Всероссийской конференции по механике сплошной среды в 1995 г., которая благодаря ученикам и последователям продолжает жить и по сей день.

Последние годы вся его научная деятельность была посвящена созданию энциклопедической монографии, посвященной динамике Ньютона. Им был задуман план, содержащий около ста лекций, некоторые из них излагались в классическом ключе с добавлением научных результатов последних лет; некоторые, казалось бы, не имели прямого отношения к модели абсолютно твердого тела. Гораздо позже, разбирая пожелтевшие

черновики написанных им лекций (их было немногим более половины из задуманных 100), я стал немного понимать задуманное учителем.

В конце лета 2001г. исполнявший роль заместителя И.И. Воровича по кафедре Л. М. Зубов заболел и Иосиф Израилевич попросил меня выполнять эти функции как самого молодого профессора. 3 сентября на заседании он представил меня в качестве своего заместителя, а 6 сентября скоропостижно скончался.

Он был полон творческих идей, однако смерть оборвала его планы и устремления.

Прошло около 20 лет. Его творческое наследие не осталось утраченным. Вышли в свет 2 тома «Лекций по динамике Ньютона». Первый том практически был готов при его жизни, однако увидел свет в 2004 г. (редакторы В.И. Юдович и Э.Н. Потетюнко). Над подготовкой к изданию второго тома работала вся кафедра теории упругости, особая благодарность – В.М. Шутько и Э.Н. Потетюнко; том вышел в свет в 2010 г. к 90-летию со дня рождения И.И. Воровича.

Память об Иосифе Израилевиче живет и на кафедре, которую он создал. Он издалека наблюдает за нашими успехами; каждый год 21 июня коллектив кафедры отмечает день рождения её основателя, молодые сотрудники и новые аспиранты внимательно слушают эпизоды из его жизни, воспоминания учеников и Л.С. Ворович, которая неизменно присутствует на этих собраниях.

Мы помним Вас, дорогой учитель!

**Б.И. Вольфсон,**

*сотрудник НИИМшПМ в 1977–1992 гг.*

В этом году исполняется сто лет со дня рождения выдающегося учёного и педагога – академика И.И. Воровича. От друзей я узнал, что готовятся к публикации воспоминания людей, знавших Иосифа Израилевича. Мне неловко примыкать к когорте окружавших его выдающихся личностей, но всё же некоторыми из своих воспоминаний я тоже решаюсь поделиться.

Мои коллеги, будучи студентами мехмата, слушали лекции Воровича по теоретической механике. Они уже тогда понимали, какой выдающийся человек их учит. Уже работая в ин-

ституте, часто вспоминали многие эпизоды из студенческой жизни, связанные с именем их лектора.

Свою преподавательскую работу Иосиф Израилевич продолжал до самых последних дней жизни. Но мне, к моему величайшему сожалению, слушать его лекции не привелось. Однако три года в аспирантуре и потом пятнадцать лет работы в НИИ механики и прикладной математики дали возможность видеть этого удивительного человека в деле и порой довольно близко с ним общаться.

Расскажу об одном из таких эпизодов, который был связан с проектированием панорамы Первой конной армии. Это сооружение должны были построить в Ростове неподалёку от Ворошиловского моста через реку Дон. Автором проекта был заслуженный архитектор России Ян Семёнович Занис, спроектировавший также здание Донской государственной публичной библиотеки. Конструкция Панорамы была экспериментальной и нуждалась в скрупулёзном расчёте, которым занимались специалисты РИСИ и строительного отдела Теплоэлектропроекта.

Однажды весной 1980 г. меня вызвал Иосиф Израилевич и сказал, что временно освобождает от текущей работы и поручает также поучаствовать в расчёте конструкции панорамы. Мною была тогда разработана компьютерная программа, предназначенная для расчёта корабельных конструкций. По мнению Воровича, она могла быть приспособлена для решения поставленной задачи. Времени на выполнение задания было в обрез. И хотя поначалу всё шло гладко, в какой-то момент я столкнулся с проблемой, справиться с которой не смог ни самостоятельно, ни с помощью своих высококвалифицированных коллег.

Когда стало ясно, что отступить некуда, я решил обратиться за советом к Воровичу. Я пришёл к его кабинету в обеденный перерыв и не застал на месте секретаря Нину Любимову. Заглянув в дверь кабинета, я увидел, что Иосиф Израилевич занимается несколькими делами одновременно. В одной руке он держал бутерброд с сыром, который Нина принесла ему из буфета. Бутерброд был, видимо, вчерашний, так как сыр выгнулся на нём, как крыша китайской фанзы. Иосиф Израилевич указательным пальцем прижимал сыр к хлебу в средней точке. Другой рукой он держал письмо, которое просматривал. На столе стоял стакан бледного чая в металлическом подстаканнике. К уху Ворович прижимал плечом телефонную трубку и что-то говорил с набитым ртом невидимому собеседнику. Время от времени он откладывал письмо и выпивал пару глотков чая.

Я понял, что мой визит не ко времени и стал, пятясь, выходить из кабинета. Но Иосиф Израи-

евич жестом предложил мне вернуться и показал на большую доску, которая висела на стене его кабинета. Я подошёл к доске и стал на ней писать и рисовать, намереваясь дать потом устные комментарии. А дальше Иосиф Израилевич дожевывал свой бутерброд, выпил остатки чая, повесил трубку, отложил письмо и, подойдя к доске, объяснил мне, что нужно делать, не задав ни одного уточняющего вопроса.

Панораму, как вы знаете, в нашем городе так и не построили. Первого секретаря обкома Бондаренко сменил на этом посту Власов, который счёл проект слишком дорогим и закрыл его. Но по результатам проведённых исследований участниками работы была написана статья для публикации в «Известиях СКНЦ ВШ». В число соавторов я включил и Воровича, оказавшего мне неоценимую помощь. Но Иосиф Израилевич свою фамилию вычеркнул. Для него это были сущие мелочи.

Вспоминается один из семинаров, на котором Иосиф Израилевич делал доклад о результатах только что завершённого им исследования. Стыдно признаться, но я совершенно забыл, о чём конкретно шла речь. Но помню, что предварил доклад заместитель Воровича Владимир Андреевич Бабешко, который сказал, что самого себя он относит к учёным, которые обычно умеют оценить задачу с точки зрения перспектив её решения. «Я, – сказал Бабешко, – никогда не отказываюсь от трудных задач. Но бывают задачи практически неразрешимые. Их я откладываю в сторону». «Что же касается Воровича, – продолжал Владимир Андреевич, – то он не всегда умеет понять, что задача неразрешима, берётся за неё и нередко решает».

Я думаю, что хотя время Иосифу Израилевичу выпало тяжёлое, он был невероятно счастливым человеком. Выжил в войне, не попал под репрессии, добился выдающихся научных результатов, создал крупнейший на юге страны научный институт, воспитал целую плеяду учёных и педагогов. А нам, тем, кто имел счастье с ним общаться, продемонстрировал невероятные возможности человеческого интеллекта и стал примером для подражания, хотя, конечно, для большинства совершенно недостижимым.

*Я.М. Ерусалимский, доктор технических наук, профессор,  
декан мехмата 1988–2008 гг., Южный федеральный университет*

Моя первая встреча с Иосифом Израилевичем Воровичем состоялась в далёком 1962 г., когда я, будучи восьмиклассником, слушал его лекцию в большой математической аудитории мехмата РГУ на ул. Горького, 88. В течение всей лекции Иосиф Израилевич «строил» мелом на доске самолет. В процессе «строительства» он рассказывал о задачах механики, начиная от уравнения Жуковского до теории стержней и тонкостенных конструкций, шимми колеса, изменении положения центра масс самолета, связанным с расходом топлива или боекомплекта. Их должны были решать авиаконструкторы. Через много лет я понял, насколько всё это было ему хорошо знакомо и близко.

Учился я на отделении чистой математики и не был студентом Иосифа Израилевича, но дружил со многими сокурсниками-механиками. Все они боготворили Воровича и как ученого, и как преподавателя, и просто как человека. Мне же оставалось только, встречаясь с ним, здороваться и каждый раз отмечать, что он тоже здоровался со мной, незнакомым ему студентом.

Неожиданным подарком для аспирантов моих лет стала лекция И.И. Воровича «О чтении лекций по точным наукам» [1]. Её содержание я помню наизусть до сих пор. Много внимания он уделил не только теме лекции, но и вопросу о требованиях к знаниям студентов. Иосиф Израилевич сказал: «Многие лекторы, особенно молодые, считают, что студент на экзамене должен показать, что он полностью освоил курс. Знает и понимает его настолько же хорошо, как и сам лектор, забывая о том, какая дистанция разделяет студента, доцента и профессора. Это не просто возрастная дистанция, это отрезок времени, наполненный интенсивной работой ума, который и превращает бывшего студента в ученого и педагога. Экзаменуя студента, возвращайте себя на студенческую скамью, вспоминайте – каким были вы, когда сами сидели на ней».

Спустя много лет, будучи заместителем декана, а потом и деканом мехмата, я узнал, что Иосиф Израилевич не ставит двоек на экзаменах, но это не делало экзамены легкими. Я как-то завел с ним разговор на эту тему, но он этот разговор быстро свернул: «Двойка студента не воспитывает, а унижает».

Однажды после экзамена у Воровича в кабинет декана пришел студент и положил на стол заявление об отчислении. Я спросил его, почему он делает это во время сессии. «Я получил двойку у Иосифа Израилевича». «Ну, ничего страшного, подготовьтесь и пересдадите». «Нет, я не буду пересдавать экзамен – Иосиф Израилевич двоек не ставит, а я её получил».

На следующее утро ко мне пришел Иосиф Израилевич: «Я вчера поставил двойку». «Я знаю, Иосиф Израилевич. Студент был у меня после экзамена. Он написал заявление об отчислении». «Ну и молодец, значит, он меня правильно понял, механиком он бы все равно не стал. Он отличный парень, но гуманитарий. Это родители уговорили его идти на мехмат. Зачем родители вмешиваются в такие важные дела своих детей...».

Многие годы после создания им Института механики и прикладной математики (НИИ МиПМ) Иосиф Израилевич жил «на два дома» – мехмат на Горького и институт на Западном. Их разделяли километров 10. По утрам он приходил на факультет, читал лекции, а потом уезжал в институт.

Руководству университета пришла в голову идея переселить мехмат из своего родового гнезда (Горького, 88) в корпус физического факультета на Западном. Единственным аргументом в пользу такого переселения было соседство с НИИМиПМ и нашим вычислительным центром (ВЦ). Началась новая эра в жизни факультета. Несмотря на потерю своих классических лабораторий – теории упругости и гидроаэромеханики, соединение на одной территории трех составных частей единого целого – мехмата, института и ВЦ, оказалось плодотворным.

Иосиф Израилевич теперь курсировал в течение дня из института на кафедру, с кафедры в деканат, из деканата в кабинет своего ученика, профессора Виктора Иосифовича Юдовича и обратно в институт. Очень часто мы курсировали с ним вместе, и это всегда доставляло мне радость общения с ним, с В.И. Юдовичем и ещё многими и многими интересными людьми.

Будучи глубоким теоретиком не только в механике, но и в чистой математике, Иосиф Израилевич всегда интересовался приложениями и экспериментами. Как-то в моем присутствии

Виктор Иосифович продемонстрировал Иосифу Израилевичу прибор, с помощью которого экспериментально показывается, что у кругового маятника (стержень с грузом, закрепленный на оси) в условиях подачи на ось вибрации возникает дополнительное устойчивое состояние. Этот результат был давно получен теоретически, формулы позволяли определить частоту, начиная с которой наблюдается этот эффект.

Иосиф Израилевич был в восторге от опыта. Он сам пробовал вывести вибрирующий стержень из нового устойчивого состояния, восторгался тому, что оно действительно было устойчивым. «Друзья мои, – сказал он, обращаясь ко мне и Юдовичу, – этот опыт нужно обязательно показывать школьникам на днях открытых дверей. После такой демонстрации они сами придут к нам за объяснением этого явления».

Потом он обратился к Юдовичу: «Виктор Иосифович, мы с тобой, да и ты сам, много внимания уделяем задачам потери устойчивости, но ведь задачи возникновения устойчивых состояний не менее важны и интересны». Учитель знал любимый конек ученика. Виктор Иосифович оседлал конька и начал рассказывать о возникновении устойчивых режимов в течениях Куэтта, которыми он занимался со своими учениками последнее время. Иосиф Израилевич, слушая Юдовича, время от времени поворачивался ко мне. Он гордился своим учеником и был рад присутствию декана.

Последние годы жизни Иосифа Израилевича были сложны в моральном плане – рушились не только страна и её экономика, разрушалась и наука, не только теоретическая, но и прикладная. Институт механики, захлебывавшийся от заказов Министерства обороны, авиационной, судостроительной и тяжелой промышленности, вдруг разом лишился всего этого и вел трудную борьбу за выживание.

В те дни, когда шахтеры Кузбасса стучали касками по мостовой Горбатого моста около Белого дома, ко мне в кабинет пришел Иосиф Израилевич. На нем не было лица: «Слушай, у меня в кабинете тонкие двери, а у тебя – толстые, двойные. Можно я их плотно закрою?» «Конечно, Иосиф Израилевич, а в чем дело?» «Ты видел, как шахтеры стучат касками? О чем они думают – эти наши руководители ... (здесь за многоточием стоят матерные выражения, которые я в первый и последний раз услышал из

его уст. – Я.Е.), это же не какие-то ученые как мы, это шахтеры. Они сегодня стучат касками, а завтра выйдут на баррикады».

Может быть, для того чтобы отойти хоть на время от неразрешимых проблем с институтом, а возможно, чтобы завершить круг своей педагогической жизни, Иосиф Израилевич начал писать свои лекции по классической механике [2]. И не просто писать, а сразу в процессе написания обсуждать их на кафедре, в своем директорском кабинете в институте, в кабинете у В.И. Юдовича. Я часто оказывался пассивным слушателем этих обсуждений в кабинете В.И. Юдовича. У доски, висевшей на стене, стоял Иосиф Израилевич и читал нам с Юдовичем очередную лекцию. Потом к доске подходил Юдович и что-то поправлял или критиковал. Потом у доски их уже было двое – маленький Иосиф Израилевич и высоченный Виктор Иосифович с неизменной сигаретой в зубах. В сизом табачном дыму они плавали, как серафимы в облаках, а я в это время наслаждался течением их мыслей.

О лекции И.И. Воровича для аспирантов, прочитанной нам в 1972 г., я вспомнил во время празднования восьмидесятилетия Иосифа Израилевича. Целый раздел лекции он посвятил внешнему виду преподавателя. В то время (1972 г.) джинсы ещё не были обиходной одеждой, их носили стилиаги, модники и пижоны. «Некоторые молодые преподаватели позволяют себе приходить на занятия в джинсах, что совершенно недопустимо», – сказал тогда Ворович. Во время юбилейного заседания факультета, института и ВЦ (2000 г.) на Иосифе Израилевиче был бежевый джинсовый костюм, а на ногах в тон костюму – прекрасные кроссовки. Иосиф Израилевич выглядел помолодевшим на десяток лет и забывшим о перенесенных болезнях.

Через год его не стало. После рабочего дня он вернулся домой из института, сел на диван и попросил жену – Любовь Семеновну – измерить ему давление. Любовь Семеновна вышла в другую комнату за тонометром. Раздался тихий стук. Это голова умершего Иосифа Израилевича стукнула по спинке дивана. На письменном столе осталась незавершенная рукопись его лекций. Их первая часть увидела свет в 2004 г., а вторая часть вышла в 2010 г. благодаря коллективу кафедры теории упругости [2].

В Англии, в музее, я увидел кровать, на которой спал Исаак Ньютон, и понял, что они с Иосифом Израилевичем были приблизительно одного роста и не только физического. И. Ньютон был человеком безупречной репутации. Ему было доверено руководство Королевским монетным двором Англии. Будь И. Ворович его современником, ему можно было бы доверить монетный двор России.

## Литература

1. Воспоминания об академике И.И. Воровиче. Ростов н/Д.: Изд-во РГУПС, 2004. 319 с.
2. Ворович И.И. Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и её развитие. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. Ч. 1. 680 с.
3. Ворович И.И. Лекции по динамике Ньютона. Современный взгляд на механику Ньютона и её развитие. М.: Физматлит, 2010. Ч. 2. 602 с.

*О.Д. Пряхина, доктор физико-математических наук, профессор,  
Кубанский государственный университет*

Впервые я увидела Иосифа Израилевича Воровича в сентябре 1968 г., когда он начал читать нам, студентам 2-го курса механико-математического факультета РГУ, курс лекций по теоретической механике. Он нам сразу понравился. Иосиф Израилевич был уже авторитетный ученый, и мы слегка побаивались, так как не знали, насколько он строг и требователен. А он оказался простым, доброжелательным и веселым в общении. Лекции читал спокойным негромким голосом, при этом доходчиво и четко излагал суть вопроса; всегда стимулировал наше творческое отношение к изучаемому предмету. Он понимал, что, прежде всего, студент должен уметь из огромной массы получаемых знаний извлекать те, которые позволят решить поставленные перед ним задачи, а не заучивать формулы. Сдавать экзамены ему было легко и приятно. В качестве дополнительных вопросов он давал простейшие задачи на сообразительность, и если студент справлялся с заданием, то на хорошую оценку не скупился. На 5-м курсе Иосиф Израилевич читал нам функциональный анализ.

После создания НИИМиПМ РГУ Иосиф Израилевич Ворович стал бессменным директором, а его ученик Владимир Андреевич Бабешко – заместителем директора. Это было время расцвета нашего НИИ, жизнь бурлила, каждый год в ряды сотрудников вливались выпускники вузов, создавались новые лаборатории и научные направления, защищались диссертации, заключались хозяйственные договоры с предприятиями.

Навсегда останутся в памяти совместные с Воровичем поездки на конференции, проходив-

шие в замечательных городах – Ереване, Тбилиси, Ташкенте, Киеве, Москве и других красивейших местах Советского Союза. Иосиф Израилевич всегда возглавлял делегации, в которых было много молодых, только начинающих свою научную карьеру сотрудников. На этих конференциях встречались ученые из разных регионов и научных школ. Здесь часто в неформальной обстановке обсуждались современные проблемы, возникали новые идеи, устанавливались научные связи, и Иосиф Израилевич старался как можно шире ввести нас в этот круг. Советовал, какие доклады обязательно надо послушать, знакомил со своими коллегами, часто брал нас с собой на посиделки корифеев науки. После таких поездок все заряжались энергией, и хотелось много работать, решать новые задачи.

Иосиф Израилевич Ворович внес крупный вклад в развитие механики и прикладной математики. Ему были свойственны широта научных интересов, умение не навязывать свои идеи и мысли, а незаметно подтолкнуть собеседника к тому, что данная проблема интересна и ею стоит заняться.

Как-то Лена Ворович сказала мне, что в детстве она завидовала ученикам отца. Ей казалось, что он уделяет им гораздо больше внимания, чем ей, но, повзрослев, поняла, что так и должно быть, ведь ученики – часть его научной жизни.

Иосиф Израилевич обладал огромным авторитетом в науке и высокой общей культурой. Он никогда не повышал голоса, а ровный характер, скромность и постоянная доброжелательность снискали ему любовь и уважение не только кол-



лег и учеников, но и всех людей, с которыми ему доводилось общаться.

На защитах диссертаций он, казалось, дремал или был погружен в какие-то свои мысли, но когда начиналась дискуссия, Ворович выходил к трибуне и в нескольких словах мог обрисовать суть диссертации, выделить изюминку, объяснить непонятные места, и работа приобретала новое звучание.

Мне довелось общаться с Иосифом Израилевичем и в редакции журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион», где он был председателем редколлегии журнала по естественной серии, а я – заместителем главного редактора. Ворович не любил отклонять статьи, считал, что рецензент должен уметь увидеть рациональное зерно в любой работе и, указав на недостатки, помочь автору двигаться в правильном направлении.

В последнее время мы часто с ним беседовали. Он рассказывал о своей жизни, научной и педагогической деятельности, участии в Великой Отечественной войне, о друзьях своей юности, их судьбах и совместной учебе. Общение с ним всегда доставляло радость. Иосиф Израилевич был обаятельным человеком, умным и интересным собеседником, мудрым учителем. Я многому научилась у него, прежде всего, в человеческих отношениях. Я часто вспоминаю Иосифа Израилевича, мне не хватает его дружеской поддержки и участия.

Иосиф Израилевич чувствовал, что силы уходят и, может быть, поэтому последнее время близко к сердцу принимал любые неприятные известия, будь то политические события в стране, стихийные бедствия или уход из жизни своих коллег или соратников. Мы знали это и старались его беречь и не огорчать.

Большую радость доставила Воровичу поездка на юбилей своего ученика, ректора Кубанского университета академика В.А. Бабешко. Это произошло 30 мая 2001 г. Владимир Андреевич прислал за ним в Ростов комфортабельную машину, окружил его заботой и вниманием. Для сотрудников университета Иосиф Израилевич Ворович был живой легендой, классиком, и каждому хотелось поговорить с ним, а он никому не отказывал в общении. На банкете, когда Иосиф Израилевич произносил речь в честь юбиляра, в зале стояла тишина, все ловили каждое его слово. О деликатности Воровича говорит такой штрих. На обеде по приезду в Краснодар я заметила, что он прикрывает рукой ухо. На мой вопрос, не продуло ли его в дороге, ответил, что все в порядке. И лишь через некоторое время, подойдя к нему, я поняла, что виной всему кондиционер. Просто Иосиф Израилевич не хотел никого лишиться удобства, ведь было жарко.

Последний раз я увидела Воровича незадолго до его смерти, а точнее, накануне этого печального дня. После лекции я возвращалась в институт, а он шел навстречу. Видно было, что он неважно себя чувствует. На мой вопрос о здоровье ответил, как всегда: «Нормально. Просто у Вали (В.М. Шутько, его ученица. – О.П.) умерла мама и надо выяснить, чем я могу помочь. Надо позвонить Любе (жене. – О.П.)».

Иосиф Израилевич Ворович прожил долгую, полную свершений, достойную жизнь. Сегодня его нет рядом с нами, но остались семья: жена, дочь, любимая внучка, и мы, его ученики и коллеги. Память о нем живет в наших сердцах.

\*\*\*

Фрагмент из книги  
«Воспоминания об академике И.И. Воровиче» 2004.  
Изд-во РГУПС, 319 с.

*М.И. Чебаков, доктор физико-математических наук, профессор, сотрудник НИИМиПМ с 1971 г., Южный федеральный университет*

Впервые я познакомился с Иосифом Израилевичем Воровичем в 1966 г. на лекции по сопротивлению, которая мне хорошо запомнилась. Он начал с рассказа о том, чем нам, выпускникам механико-математического факультета Ростовского госуниверситета, придется заниматься в жизни, приводил примеры конструкций, над рас-

четами которых, возможно, придется работать. Многие из нас впервые слышали, что размах крыльев современных самолетов равен десяткам метров, максимальные прогибы их достигают нескольких метров и мы научимся все это и многое другое рассчитывать. На нас, второкурсников, это произвело сильное впечатление. Лекции

Воровича никогда не были сухой теорией, они сопровождалась реальными примерами из жизни и студенты всегда чувствовали будущую востребованность приобретаемых знаний.

Иосиф Израилевич очень часто ездил в Москву, и долгожданные лекции переносились. Как мы потом узнали, шел процесс организации НИИМиПМ. Среди выпускников слышались все чаще разговоры о желании работать в институте под руководством И.И. Воровича. Это была сокровенная мечта буквально всех, к тому же престиж научного работника был в то время очень высок. К моей большой радости, меня приняли на работу в институт на должность ученого секретаря. Начался период тесного общения с Иосифом Израилевичем по организационным, научным и другим вопросам. Меня всегда поражали его демократичность в общении, внешнее спокойствие в сложных и критических ситуациях. Казалось, что ничто не могло повергнуть его в панику. Он никогда не делал замечаний грубо, они всегда воспринимались правильно и без обид. Многие к нему шли за советом не только по научным проблемам, но и чисто житейским. Он всегда находил нужные слова и оказывал поддержку. Даже сейчас, когда Воровича нет с нами, при обдумывании сложной ситуации непроизвольно все еще приходит мысль: а что скажет об этом Иосиф Израилевич? Его авторитет для тех, кто его знал, был абсолютен. С его уходом мы все осиротели...

*Несколько эпизодов моего общения с И.И. Воровичем.* Довелось мне присутствовать в 1985 г. на заседании бюро Отделения механики и процессов управления АН СССР, на котором Иосиф Израилевич докладывал о деятельности НИИМиПМ РГУ. Замечу, что я впервые присутствовал на собрании столь высокого ранга и воочию увидел выдающихся ученых в таком большом количестве одновременно. Ранее я был знаком с их книгами и учебниками. Воровичу для доклада было отведено всего 45 минут, и я был восхищен тем, с каким великолепным искусством за столь короткое время ему удалось рассказать о всех направлениях деятельности института. Доклад произвел на академиков благоприятное впечатление, и все выступающие в прениях давали только положительные оценки. Отмечали разно-

образии тематики и удачное сочетание фундаментальных и прикладных исследований. Академик К.В. Фролов даже высказал мысль о переводе института в систему Академии наук.

В начале 90-х гг. прошлого столетия, на заре перестройки, И.И. Ворович был назначен председателем довольно серьезной комиссии по проверке научной деятельности Ленинградского университета. Я в то время все еще работал ученым секретарем НИИМиПМ РГУ, и Иосиф Израилевич взял меня с собой в Ленинград для работы в этой комиссии. Поселили нас с Воровичем в двухкомнатном номере люкс в центре города, так что мне посчастливилось прожить целую неделю в одном номере с этим замечательным человеком. Замечу, что Иосиф Израилевич каждое утро делал зарядку и, что меня поразило, он не менее 12 раз отжимался от пола, а было ему уже около 70 лет. Несколько эпизодов из той командировки мне запомнились.

Нам удалось в БДТ посмотреть прекрасный спектакль «Холстомер» с такими замечательными актерами, как Лебедев и Басилашвили.

Запомнилось, как мы писали отчет о проверке. Иосиф Израилевич поручил мне у всех членов комиссии собрать их отчеты и написать общий. Я полдня ломал себе голову, как соединить эти все разного стиля бумаги в одну, и почувствовал, что это займет недопустимо много времени: хотелось, чтобы все было логично. Пришлось идти к Воровичу. Он сказал, что неважно, каким будет весь отчет, главное – это те 5–10 строк, которые мы напишем в конце, ведь известно, что Ленинградский университет – один из самых лучших в СССР, и предложил мне все отчеты склеить один за другим и отдать машинистке. Все это заняло у меня 10 минут.

Уже в Ростове, отчитываясь в институте о командировке, Ворович с большим юмором рассказал о наших проблемах и заботах. Жаль, что я тогда не записал этот эпизод, да и многие другие. Все мы считали, что записывать нужно, но полагали, что все впереди, успеем...

\*\*\*

Фрагмент из книги  
«Воспоминания об академике И.И. Воровиче» 2004.  
Изд-во РГУПС, 319 с.

*В.М. Шутько, кандидат физико-математических наук,  
доцент кафедры теории упругости, Южный федеральный университет*

Когда большая часть твоей жизни прошла рядом с таким человеком, как Иосиф Израилевич Ворович, в воспоминаниях хочется обратиться ко многим эпизодам и теряться... О чем прежде всего? Одним из важных факторов в жизни преподавателя университета является общение со студентами, аспирантами, молодыми преподавателями. Ярким примером деятельности И.И. Воровича является становление таких ученых, как Ю.А. Устинов и В.И. Юдович, В.А. Бабешко, В.М. Александров, А.В. Белоконов и многие другие.

Иосифа Израилевича я впервые увидела 11 февраля 1964 г. на вводной лекции по курсу теоретической механики. Его интерес к этой дисциплине оказал влияние на всю мою жизнь. С первого занятия И.И. Ворович стал обращаться к нам, второкурсникам, называя нас «товарищи». Он мог неожиданно спросить студента: «Товарищ ..., а как Вы понимаете изложенное?» или «Товарищ ..., а как бы Вы решали дальше эту задачу?» Не каждый мог сразу правильно ответить, но дальнейшее изложение, его спокойный тон привлекали нас к работе непосредственно на занятиях. Становилось интересно и студенты не избегали вопросов преподавателя, а ждали новых вопросов и старались ответить на них, хотя многим, уже прошедшим армию, поэтому не сидевшим на студенческой скамье последние два года, было трудно. И.И. Ворович не жалел времени на повторение и каждую лекцию начинал с частичного изложения материала предыдущего занятия, иногда формулировал чуть иначе, иногда дополнял изложенное ранее, приводил исторические факты, даже курьезные.

После первого экзамена по теоретической механике я поняла, что и во время экзамена можно и нужно студента учить, что и использую по настоящее время. Как это делалось? Увидев, какой материал не выучил или не понял студент, Иосиф Израилевич давал дополнительное время на подготовку, а потом помогал в устном изложении вопроса. Двойки И.И. Ворович ставил редко и с большим сожалением.

Доброе и внимательное отношение Иосифа Израилевича к студентам проявлялось не только на его собственных занятиях. Как-то почти всей группой мы пришли к нему с просьбой-жалобой

на непонимание задач по сопромату. Он выслушал, помог понять одну из сложных задач, объяснил её решение, но, главное, показал, что мы сами, испугавшись, недостаточно поработали. После этого случая у группы установились гораздо более доброжелательные отношения с преподавателем по сопротивлению материалов Л.Б. Царюком.

Были и другие важные жизненные уроки, преподанные нам Иосифом Израилевичем. Например, такой эпизод: наша группа долго и настойчиво уговаривала одного хорошо успевающего студента не бросать обучение. Не получалось: он то ходил на занятия, то переставал, то вообще пропадал надолго. И.И. Ворович заставил нас увидеть эту ситуацию по-другому: он объяснил, что негуманно и бесполезно заставлять студента учиться, если пропал интерес к будущей специальности. Не давить на человека, дать ему раскрыться в той области, к которой у него есть интерес и склонность, – это всегда было ему свойственно.

Следующий этап – выполнение курсовой и дипломной работ, аспирантура – помог увидеть И.И. Воровича в другой обстановке, не на занятиях в аудитории, а за столом крошечного кабинета (ауд. 107 в здании на М. Горького, 88). Под руководством И.И. Воровича в те времена одновременно несколько аспирантов и сотрудников занимались проблемой геометрически нелинейной устойчивости сферических оболочек. Решение таких задач стало возможным в высоких приближениях методом Бубнова – Галеркина в связи с появившимися в вычислительном центре РГУ ЭЦВМ. После довольно громоздких алгебраических выкладок и составления программ в машинных кодах можно было получить численное решение, что требовало объединения усилий и навыков нескольких сотрудников. Еще студенткой И.И. Ворович познакомил меня со своей аспиранткой В. Зипаловой и сотрудницей ВЦ В. Шепелевой. Некоторые результаты удавалось получить за ночь работы за пультом ЭВМ, но их следовало понять и обсудить. Днём спешили на факультет к Иосифу Израилевичу показать распечатки и запланировать следующие расчеты. Иногда результаты оказывались довольно странными, их хотелось срочно обсудить. В таких случаях можно было позвонить И.И. Воровичу и

даже прийти к нему домой. Впоследствии из воспоминаний Л.С. Ворович я узнала, что такие обсуждения непосредственно в квартире случались многократно.

Задача о хлопке сферического купола, а чуть позже – конического, была тогда успешно решена, это позволило перейти к заключению ряда хоздоговорных работ.

Иосиф Израилевич объединял около себя очень разных людей, но у каждого была возможность своей реализации. Доброжелательность, желание и способность понять молодого челове-

ка сопровождали деятельность Иосифа Израилевича на всём жизненном пути. Он был жизненнолюбом, с благосклонностью относился к детям, которых видел и в студентах, умел поговорить с ними, причем основой его отношения к людям, независимо от их возраста, всегда было уважение к конкретной личности. Убеждалась в этом неоднократно, когда он общался с моей дочкой (в разном ее возрасте).

И.И. Ворович всегда с большой теплотой и благодарностью вспоминал своих учителей и сам для нас был настоящим учителем и воспитателем.

*Чем кто умнее, тем тот скромнее.  
Цицерон.*

**Шепелева В.Г.,**

*старший научный сотрудник НИИМиПМ, 1971-2000 г.*

Легко вспоминать, но очень трудно записать воспоминания об И.И. Воровиче, которому в 21 июня 2020 г. исполнилось бы 100 лет.

Тысячи слов умных, теплых, восторженных, порой пронзительных звучали и в юбилейных поздравлениях при жизни Иосифа Израилевича, и в официальных оценках очередных этапов его научной, организаторской, общественной деятельности, и в книге «Воспоминания об академике И.И. Воровиче». Не меньше произнесено, написано об удивительной (для такого гиганта науки!) простоте, умной деликатности, очаровании от общения с Иосифом Израилевичем. Так что добавить к этим словам что-то новое трудно.

Я хочу рассказать о своей трудовой жизни в НИИМиПМ.

С начала 50-х гг. XX столетия в СССР начинается переход от лозунга «Кибернетика–лженаука» к лозунгу «Кибернетика–панацея». Создаётся первый вычислительный центр при Министерстве обороны, издается первый учебник руководителя этого центра А.И. Кислова: «ЭВМ». А в Ростове в 1957 г. ректором университета назначается Ю.А. Жданов, и уже в 1958 г. создается вычислительный центр при РГУ.

В эти переломные годы я окончила школу и поступила на физмат. До 3-го курса мы учились на отделении математики. В 1958 г. группу ма-

тематиков делят на две, одна из которых – «математик-вычислитель», т.е. программист.

Срочно вводятся новые курсы лекций: «Программирование» читает Лев Александрович Чикин, «Вычислительные методы» – Р.Х. Зарипов, «Теорию автоматического регулирования» – Иосиф Израилевич Ворович! Это было мое первое ощущение необычности Иосифа Израилевича. Так что я знаю, каким он был выдающимся лектором – полное подтверждение знакомого высказывания: «Тот истинный мудрец, кто многое может сказать коротко и ясно!»

В какой-то мере умел очень сложные вещи доступным языком объяснять мой однокурсник Леонард Болеславович Царюк, что в дальнейшем очень облегчало нашу длительную совместную работу в НИИМиПМ. Но именно в какой-то мере.

На 5-м курсе я еду на практику и писать диплом в Киев в ВЦ АН УССР (Институт кибернетики). Руководитель В. Иванов (бывший ростовчанин) дает тему: «Динамические характеристики звеньев многоконтурных систем автоматического регулирования». Вот уж прихоть случая – пригодились лекции Иосифа Израилевича!

В апреле приезжаю с письмом-просьбой направить меня на работу в ВЦ АН УССР, а получаю направление в ВЦ РГУ. В августе 1961 г. выхожу на работу и сразу начинаю сотрудничать

с одним из первых аспирантов Иосифа Израилевича – В.М. Александровым. Программирование тогда было очень трудоемким (никаких пакетов стандартных программ, трансляторов, вся программа писалась в машинных кодах, ЭВМ одноадресная, со скоростью всего 100 операций/с, с ручным распределением очень ограниченной памяти – теперь это невозможно себе представить). Так что мы были первопроходцами! Наш курс – первый выпуск программистов Ростова, из предыдущего направили в ВЦ нескольких человек, и обучались они, уже работая.

Задание мы выполнили. По очереди к нам стали приносить задачи для программирования и счета ученики Иосифа Израилевича (В.М. Александров, Ю.А. Устинов, Володя Бабешко – тогда еще студент). Появились ЭВМ классом выше – шла ускоренная компьютеризация всех направлений науки и техники. На ВЦ решались задачи химиков (В.И. Минкин), медиков, задачи из сельмашевского втуза, из пединститута и т.д.

Дальнейшее развитие ВЦ получил в 1963 г. (всего-то через 2 года от начала моей работы!), когда заведующим стал А.Л. Фуксман. Молодой (25 лет), очень талантливый, уже кандидат физ.-мат. наук (недаром на конференцию, посвященную его 80-летию, в Ростов съехались ученые из разных городов – спустя 40 лет после его трагической гибели), тщательно проанализировав результаты работы ВЦ, он пришел к выводу, что нужно категорически отказаться от просто «обслуживания». Он организовал свой семинар, на который пригласил сотрудников различных кафедр РГУ, особенно физмата (И.И. Ворович, А.К. Никитин, В.И. Юдович, В.М. Александров, Ю.А. Устинов, В.А. Бабешко и других), отделил группу «механиков», которые уже работали с соответствующими задачами. Некоторые сотрудники ВЦ (Н.И. Минакова, М.Н. Яценко и я) стали посещать знаменитый «семинар по понедельникам» И.И. Воровича на физмате. На кафедре к тому времени накопилось много задач, требующих расчетов на ЭВМ, особенно по двум направлениям: контактные задачи и теория оболочек. Нужно было программировать и считать!

Началась моя работа с «оболочечниками». Первая задача об устойчивости пологого сферического купола была темой кандидатской диссертации В. Ф. Зипаловой, аспирантки Воровича, выпускницы физмата РГУ, работающей в педин-

ституте. Мне было поручено сделать комплекс программ для расчетов, результаты и анализ которых и были содержанием будущей диссертации. На этом этапе Виктория Федоровна занималась отладкой, поиском ошибок, просчетом контрольных вариантов и т.д. Управляющей программой этого комплекса в дальнейшем пользовались при расчете устойчивости других типов оболочек вращения. Когда пошел основной счет, мы часто общались с Иосифом Израилевичем (чаще всего у него дома на Суворова, кажется), и маленькая Лена заползала к папе на спину, садилась на шею, нисколько при этом не мешая ни ему, ни нам.

Иосиф Израилевич включил меня в содокладчики на конференции в Киеве (май 1965 г.) и в соавторы статьи в журнале МТТ. Мой муж Валерий тоже полетел в Киев по своим аспирантским делам. Иосиф Израилевич собирал по вечерам у себя в номере своих ростовчан. В один из этих вечеров мы пришли вместе с мужем. Познакомившись, Ворович подробно расспросил Валерия, чем он занимается. Выяснилось, что у него есть приятель в Киеве, в Институте кибернетики, – Георгий Евгеньевич Пухов, переехавший из Таганрогского радиотехнического института. Муж сказал, что знаком с его работами, они имеют отношение к теме его диссертации. В один из следующих вечеров Пухов оказался уже в номере Воровича. С тех пор все оставшиеся 2 года аспирантуры Валерий сотрудничал с Георгием Евгеньевичем. Он же был оппонентом на его защите. После ухода И.И. Воровича мой немногословный муж с неподдельной горечью от утраты напомнил мне этот случай.

В январе 1965 г. мы ездили большой командой ростовчан в Москву на 5-ю Всесоюзную конференцию по теории пластин и оболочек, где я впервые увидела, с каким уважением, даже почтением относятся к нашему Воровичу такие мэтры науки, как тогда уже знаменитые академики Л.И. Седов и А.Ю. Ишлинский, профессор А.С. Вольмир и многие другие. Так получилось, что после первых аспирантов (Ю.А. Красовский, В.М. Александров, Ю.А. Устинов) у Иосифа Израилевича и в аспирантуре, и на ВЦ оказались в основном женские команды: В. Ненастьева (Шутько), О. Малкина, Т. Александрова (Виленская), О. Аксентян, В. Зипалова и другие – все они окончили РГУ по специальности «механи-

ка», их курсовыми и дипломными работами руководил И.И. Ворович, но работать на вычислительных машинах они еще не умели. Из ВЦ в команду вошли Н.И. Минакова, М.Н. Яценко, Л.С. Шацких, я, позже присоединились другие. Но мы не были механиками и в некотором смысле считали себя «ущербными». Иосиф Израилевич так не считал, полностью нам доверял и называл нас «мои девочки». Это закрепилось. Многие механики и математики Советского Союза на конференциях, съездах, школах так и говорили: «Приехал Ворович с девочками», хотя многие из нас уже стали мамами.

После того как я закончила работу с В.Ф. Зипаловой, Иосиф Израилевич решил дать мне уже самостоятельную задачу об устойчивости пологого эллиптического купола, в вычислительном плане неизмеримо более сложную по тем временам. ЭВМ с нужной памятью и скоростью в Ростове не было, пришлось ездить в места, где ВЦ удавалось договориться: в Таганрог, Донецк (Украина), а счет вообще вести в Минске.

В эти же годы аспиранты Иосифа Израилевича и сотрудники ВЦ решали задачи устойчивости тонких оболочек вращения с различными образующими. К концу 60-х гг. прошлого века уже накопились результаты для того, чтобы приступить и к задачам устойчивости составных оболочек вращения. Кафедра теории упругости получила заказ от Киевского строительного института (КИСИ) на расчет таких оболочек.

В 1969 г. по инициативе Ю.А. Жданова был создан Северо-Кавказский научный центр высшей школы (СКНЦ ВШ), в 1971 г. – научно-исследовательские институты, в том числе Научно-исследовательский институт механики и прикладной математики (НИИМиПМ), директором которого стал чл.-корр. АН СССР И.И. Ворович.

Контактные задачи и теория пластин и оболочек в качестве главных направлений исследований вошли в тематику института. Так как я с 1961 г. работала по той и другой тематике, ведущий отделом тонкостенных конструкций Л.Б. Царюк и И.И. Ворович предложили М.Н. Яценко и мне перейти из ВЦ на работу в институт. Поколебавшись (ни помещения, ни места для работы, а в неизвестном будущем отдаленность этого места – Западный), мы все же согласились. 4 года работали, кто где мог, даже в неотреставрированном, мрачном, с решетками на

окнах, здании сегодняшнего СКНЦ. В 1975 г. НИИМиПМ, а в 1976 г. и ВЦ, так нам необходимый, наконец стали и жить рядом, практически в одном здании. Появилась новая, гораздо более мощная ЭВМ – БЭСМ-6.

Мы продолжали сотрудничество с Киевом, Севастополем, Балаклавой. Начались частые командировки в эти места. Это теперь Балаклава – туристический центр, а тогда это было совершенно закрытое место. Нужно было в Ростове в милиции получить разрешение на въезд. Находиться в Балаклаве разрешалось с 8 утра до 18 вечера, ночевать приходилось в Севастополе. Окончательно сдали тему уже в 1977 г., перед самым Новым годом, просидев в Севастополе и Балаклаве две недели. Прилетели (я и Царюк), как говорится, с корабля на бал – в нашем институте шёл новогодний вечер. Отчитались, отдали документы и даже благодарственное письмо от заказчиков. Выходим в фойе на торжественную часть и вскоре слышим свои фамилии – нас награждают знаком «Победитель соцсоревнования» от министерства, т.е. с вручением удостоверения, значка и т.д. Я и теперь с благодарностью вспоминаю Иосифа Израилевича. Конечно же, только по его инициативе эти награды (их всего было 2!) отдали нам.

Еще вспоминается мне одна «временная» работа с Воровичем. В мае 1977 г. он попросил меня отвлечься от основной работы в отделе и помочь ему и Н.И. Минаковой, так как для заявленного на 5-ю Всесоюзную конференцию по теории пластин и оболочек (Харьков, сентябрь 1977 г.) доклада кое-что нужно было еще запрограммировать, посчитать и проанализировать. Я присоединилась к решению нелинейной задачи. Когда пошел счет, мы часто встречались с Иосифом Израилевичем, анализировали результаты и планировали варианты дальнейших исследований. Я была включена в содокладчики, мы все вместе поехали в Харьков. После конференции была оформлена статья, которая вышла в журнале МТТ в 1979 г. Этот этап работы мне очень понравился: не было особой спешки (всё лето, с мая по сентябрь), Иосифа Израилевича удивляли и радовали какие-то неожиданности в результатах, а меня, соответственно, его реакция. Статью отправили, я занялась текущей работой по теме в отделе. Вскоре Ворович вызвал меня и предложил продолжить работу под его руководством в

группе, исследующей вопросы устойчивости вязкоупругих и вязкопластических систем. Я растерялась: «Иосиф Израилевич! Я же не механик и никогда им не буду!» В ответ слышу: «Ты уже давно механик!» Я: «Нет, я работаю 16 лет с механиками настоящими, но я не механик!». Ворovich, несколько обиженно, сказал: «Подумай!» Я подумала и осталась в отделе, тем более что предстояла сдача темы с Царюком.

Вскоре после сдачи отчета в Балаклаве теоретическая часть отдела ОТК стала соисполнителем очень важной темы, над которой работали многие годы, вплоть до начала 90-х гг.

Вообще, время с 1975 г. до конца 80-х – начала 90-х было расцветом НИИМиПМ и отдела ОТК. Успешно шла основная работа, мы ездили на съезды, конференции, научные школы в разные уголки СССР, сами организовывали школы, куда приезжали крупные ученые, мы писали научные статьи, защищали диссертации. В институте, начиная со знаменитого новоселья (1975 г.), проводились праздничные вечера, а наш Иосиф Израилевич после традиционного ужина в своем кабинете с сотрудниками администрации института обходил некоторые закоулки своих владений, в том числе и наш ОТК. Узнав о чьем-то дне рождения, мог подняться и лично поздравить именинника. Простота его общения иногда дезориентировала нас: я могла и горячо с ним поспорить. А как-то был случай, когда через довольно длительное время после такого спора (не научного!) Ворovich сказал мне: «Валя! Ты была права!» Никогда мы не слышали, чтобы он на кого-то повысил голос. Всегда был выдержанным, деликатным и внимательным.

В памяти всплывает еще один случай, когда, кажется, в феврале 1981 г. несколько сотрудников отдела отправились сдавать госкомиссии 1-й этап темы. Мы улетели раньше, Иосиф Израилевич прилетал позже, накануне самой сдачи. Связь поддерживали по телефону. В очередном разговоре Л.Б. Царюк на вопрос Ворovichа «Как дела?» со своей непосредственностью выпалил: «Валя мерзнет! А так все нормально!» Тогда действительно в Москве неожиданно резко похолодало. И наш сверхзанятой директор привез мне теплую одежду. Не помню, как и кем была организована передача. Потом отец рассказывал мне, как при встрече они (два бывших артиллериста) надолго завязли в разговоре и воспомина-

ниях, тем более что воевали они в одно и то же время на соседних фронтах, Волховском и Ленинградском.

Вспоминать можно бесконечно! Не забыть командировочные поездки с Иосифом Израилевичем, коих за 40 лет совместной работы накопилось великое множество. Его популярность у ученых во всех уголках СССР была огромна. Его приглашали в гости члены научного сообщества, среди них были ученые с мировым именем, были те, кто прошел через ростовский научный семинар. У многих из них Ворovich был оппонентом по докторской и кандидатской диссертациям. Приглашали, конечно, его лично, но хотя бы несколько ростовчан Иосиф Израилевич всегда старался взять с собой. Так мы познакомились с несколькими кухнями народов СССР (армянская, грузинская, казахская и т.д.). Были мы вместе на Севане, Медео, в Риге, Вильнюсе, Таллине и т.д. А куда по своей занятости Ворovich не мог поехать сам, он посылал нас: в Молдавию, под Кишинев, в Литву, под Вильнюс, на Украину, под Киев и Львов и прочие интереснейшие и живописнейшие места. Мы были благодарны Иосифу Израилевичу за то уважение, с которым к нам относились представители других научных школ. Мне кажется, они завидовали нам и не скрывали этого.

К нашей великой радости, в 1990 г. И.И. Ворovich был избран действительным членом Академии наук СССР (единственный на всем Северном Кавказе). Других тогда не было. Ю.А. Жданов был чл.-корр. АН СССР, тоже один из первых на Северном Кавказе. Недаром им – двум выдающимся гражданам Ростова – заложены именны звезды на «Аллее звезд» города (на Ворошиловском проспекте).

В начале 90-х мы еще съездили несколько раз в Казань с отчетами. Финансирование совсем сошло на нет, важнейшая тема сворачивалась. В 1993 г. я поехала с докладом на конференцию в Горький, где был и Иосиф Израилевич. В фойе, где расположились участники со своими стендовыми докладами, Ворovich, прогуливаясь, что-то обсуждал, по-моему, с академиком Ишлинским. Увидев меня, Иосиф Израилевич подошел вместе с ним. Я отлично знала и не раз была свидетелем того, как Иосиф Израилевич любит показывать, хвалить, пропагандировать своих питомцев, чаще всего, как правильно заметил А.И. Акопов,

«с явной тенденцией к преувеличению». Так что прозвучавшую свою долю похвал всерьез не восприняла. Но и сейчас я с улыбкой вспоминаю слова Иосифа Израилевича, тем более что это была моя последняя командировка, моя последняя конференция, мой последний доклад.

События 90-х описывать не хочу – они всем известны. Начались массовые увольнения, отъезды, уходы из аспирантуры, отсутствие финансирования, а значит, и работы, фактически отсутствие зарплаты и т.д. Просто невозможно себе представить, что пережил Иосиф Израилевич, наблюдая, как погибает его детище. И никакие достоинства и итоги этих лет не убедят меня в их ценности. Они укоротили жизнь многих-многих, в том числе двоих очень дорогих мне людей – И.И. Воровича и моего мужа, пережившего Иосифа Израилевича всего на 4 месяца. Кто-то из древних сказал, что «человек умирает столько раз, сколько раз он теряет своих близких». Уход И.И. Воровича в 2001 г. стал для меня таким разом. И память о нем я, конечно, буду хранить до последних моментов своей жизни. Иосиф Израилевич создал в нашем институте такую редкостную атмосферу, что лю-

ди, разбежавшиеся по городам, дальним странам и весям нашей планеты, собираясь, говорят, говорят, вспоминают, вспоминают... и суть одна: как хорошо было в НИИМиПМ! Ведь в институте числилось (вместе с хоздоговорниками) иногда больше 400 человек! Люди все разные, с разными характерами, убеждениями, желаниями, разной степенью порядочности, со своими этическими нормами поведения, симпатиями и антипатиями, что неизбежно в таком большом коллективе. И практически никогда не было ни скандалов, ни склок, даже порой в очень трудные моменты. Вот и на недавнем моем юбилее собрались одноклассники, однокурсники, родственники и 6 человек из нашей 312-й комнаты в НИИМиПМ (многих уже нет). Мы продолжаем встречаться спустя 20–30 лет после совместной работы несколько раз в году, поводы найдутся! Так что и за это спасибо нашему Иосифу Израилевичу. Эти отношения – отражение ауры его института. Мы все помним и любим нашего Великого директора и гордимся, что столько лет были с ним рядом. А изречение «Незаменимых нет» к Иосифу Израилевичу Воровичу никак не может относиться. Он, безусловно, незаменим!



**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ  
«ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.  
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»**

Рецензируемый журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» продолжает приём работ. Он имеет статус центрального издания и включён в перечень ВАК по следующим отраслям:

- физико-математические науки (математика, механика);
- науки о Земле.

Принимаются работы и по другим отраслям науки. Также печатаются материалы в разделах «Заметки о книгах», «Научная жизнь», «Штрихи к портрету».

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. С электронной версией можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки [http://elibrary.ru/title\\_about.asp?id=7362](http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7362). Опубликованные статьи индексируются в российских и международных электронных библиотеках и наукометрических базах данных: РИНЦ (RSCI), РУКОНТ, «Киберленинка», ЭБС «Университетская библиотека онлайн», Ulrich, EBSCO, Chemical Abstracts.

Авторы, сохраняя за собой авторские права на работу и передавая журналу «Известия вузов. Северо-Кавказский регион» право первой публикации, автоматически принимают на себя обязательство не печатать её ни полностью, ни частично в каком-либо издании без указания ссылки на оригинальную публикацию в этом журнале.

Издательские услуги оплачиваются организацией или автором после утверждения статьи на редколлегии.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Представляется статья в электронном виде. Перед заголовком указать индекс УДК.
2. Текст должен быть набран в редакторе Microsoft Office Word 2000, 2003, 2007, 2010, 2016 через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman, размером 14 пт, страницы пронумерованы.
3. Сопроводительное или рекомендательное письмо, если статья представляется от организации. Экспертное заключение.
4. Полное название организации и ее адрес на русском и английском языках.
5. Сведения об авторах с указанием адреса, по которому будет вестись переписка, на русском и английском языках.
6. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
7. Аннотация на русском и английском языках (1000–1500 знаков / 150–200 слов).
8. Ключевые слова на русском и английском языках (8–10 слов).

Журнал распространяется по подписке – через ОАО «Роспечать». Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие). В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ, редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 218-40-00, добавочный 11-093, 11-094.

E-mail: [izvestiya@sfedu.ru](mailto:izvestiya@sfedu.ru)

Адрес в Интернете: [www.izvestiya.sfedu.ru](http://www.izvestiya.sfedu.ru)